INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND ERSTES HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 23.60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor K. v. Sanden, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 2440

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Landwehr, Rudolf, und *G. Grabert* †, Interferenzoptische Versuche zur Plattenbiegung. Mit 3 Textabbildungen 1

Weirich, Hugo, Graphische Bestimmung der Spiegelbewegungen beim Differentialwasserschloß von Johnson. Mit 13 Textabbildungen 5

Flügge, Wilhelm, und *Karl Marguerre,* Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. Mit 8 Textabbildungen 23

Poppinga, Reemt, Der Wirkungsgrad der Planetengetriebe. Mit 12 Textabbildungen 39

Grammel, Richard, Zur Berechnung der Poinsotbewegung 53

Rotta, Julius, Das Spektrum isotroper Turbulenz im statistischen Gleichgewicht. Mit 6 Textabbildungen 60

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND ERSTES HEFT 1950

Interferenzoptische Versuche zur Plattenbiegung.

Von **R. Landwehr** und **G. Grabert** †.

1. Einleitung. Die Brauchbarkeit der Benutzung lichtoptischer Interferenzerscheinungen zur Untersuchung von geringen Deformationen soll hier an dem Beispiel der Durchbiegung von Platten kurz gezeigt werden, um einmal wieder auf diese einfache Methode hinzuweisen und zu ähnlichen Untersuchungen anzuregen. Das Ziel war die Bestimmung der Form der Biegefläche und der Größe des Biegepfeiles bei einigen einfachen Belastungsfällen und ein Vergleich mit der Theorie. Bei solchen bekannten Biegefällen läßt sich weiterhin mit Hilfe des interferenz-optisch bestimmten Biegepfeiles leicht der Elastizitätsmodul des Plattenmaterials mit relativ großer Genauigkeit bestimmen.

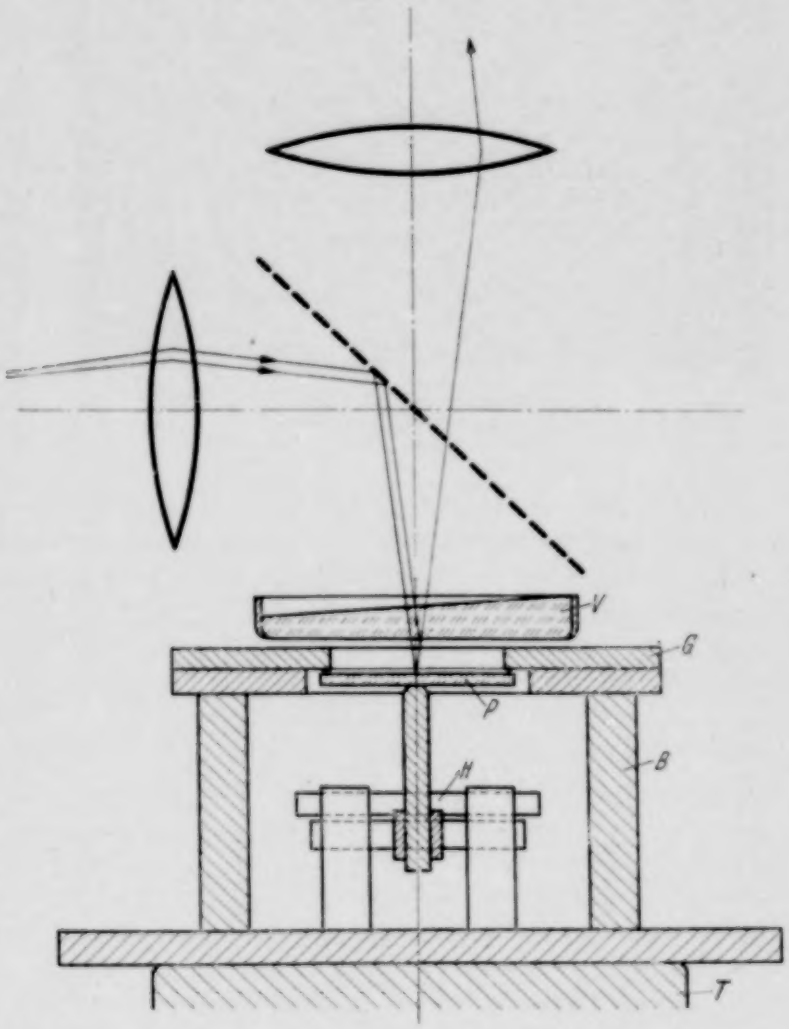


Abb. 1. Versuchsanordnung (Strahlengang schematisiert).

2. Versuchsanordnung. Benutzt wird das Verfahren der klassischen lichtoptischen Interferenzen, das schon öfter zu Biegeuntersuchungen, insbesondere auch zur Untersuchung der *Poisson*schen Konstante herangezogen worden ist[1]. Die Versuchsanordnung zeigt Abb. 1. Die Prüflingsplatte P, die der Deformation unterworfen werden soll, wird über einen halbdurchlässigen Spiegel mit monochromatischem Licht der Wellenlänge λ — z. B. einer Spektrallampe, eventuell mit vorgeschaltetem Filter — von oben beleuchtet. Die Beobachtung erfolgt im reflektierten Licht. Möglichst dicht über der Platte P befindet sich die Vergleichsplatte V. Betrachtet man die Oberfläche des Prüflings oder bildet sie auf einer Auffangebene, etwa einer photographischen Platte, ab, so tritt bei genügender Parallelität und Planität der Luftschicht zwischen P und V ein System von dunklen Interferenzstreifen auf. Dies entsteht dadurch, daß sich jedesmal zwei benachbarte (kohärente) Lichtstrahlen, von denen der eine an P, der andere an V reflektiert wird, je nach dem Gangunterschied, den sie haben, auslöschen oder verstärken. Ist das Bündel genügend parallel und fällt es genügend senkrecht auf die reflektierenden Flächen, so verbinden die Streifen die Stellen gleicher Dicke der Luftzwischenschicht; es sind „Interferenzen gleicher Dicke". Da nun die Streifen immer bei Änderung des Gangunterschiedes der beiden Strahlen um λ auftreten, entsprechend einer Änderung der Dicke der Zwischenluftschicht um $\lambda/2$, kann man sie auffassen als Schnittlinien von Ebenen, die parallel zur Vergleichsfläche V sind und immer denselben Abstand ($\lambda/2 \approx 3 \cdot 10^{-4}$ mm) voneinander haben, mit der Prüflingsoberfläche. Bei guter Ebenheit der Vergleichsfläche erhält man somit ein Höhenschichtlinienbild der Oberfläche der Platte P.

Im vorliegenden Fall wurden die Versuche mit einem Interferenzgerät[2] ausgeführt, das wegen des großen Arbeitsraumes unterhalb der Vergleichsplatte und der bequemen und feinen Ein-

[1] Vgl. z. B. *F. Kohlrausch*, Praktische Physik, S. 79, 84, 19. Aufl. Leipzig und Berlin 1944.
[2] *R. Landwehr*, Z. Instrumentenk. 62 (1942), S. 73.

stellmöglichkeit besonders geeignet war. Als Lichtquelle wurde eine Na-Spektrallampe verwendet ($\lambda = 589$ mμ). Doch dürfte bei Berücksichtigung der oben erwähnten Bedingungen auch schon ein einfacherer Versuchsaufbau brauchbar sein. Ein Interferometer, bei dem die Vergleichsfläche sich entsprechend der *Michelson*schen Anordnung seitwärts befindet und in die Ebene der Prüflingsoberfläche gespiegelt wird, ist natürlich auch hier vorteilhaft, da die Vergleichsfläche nicht mehr stört und geschützt liegt und die Interferenzen dadurch, daß in diesem Fall der Gangunterschied sehr klein gemacht werden kann, besonders scharf zu erhalten sind. Eine weitere Steigerung der Schärfe der Interferenzstreifen läßt sich außerdem durch geeignete Verspiegelung der in Frage kommenden reflektierenden Flächen erreichen[1].

Abb. 2. Interferenzstreifensystem (Höhenschichtlinienbild der Biegefläche) bei einer an drei Randpunkten in 120° Abstand frei aufliegenden kreisförmigen Platte (Belastung 1,83 kg).

Als Prüflinge dienten im vorliegenden Fall drei polierte Glasplatten. Die Reflexion an der Unterseite war bei der Platte *I* durch Mattieren dieser Seite[2] unschädlich gemacht, bei der Platte *III* durch Benutzung eines Farbglases herabgesetzt. Natürlich können derartige Untersuchungen auch an Platten aus anderem Material (z. B. Stahl usw.) durchgeführt werden, wenn nur eine genügend ebene und spiegelnde bzw. verspiegelte Oberfläche vorhanden ist. Auch wenn die Ebenheit nicht so hochgradig und das Ausgangsinterferenzsystem daher unregelmäßig ist, läßt sich die Gestalt der Biegefläche nach einem besonderen Verfahren ermitteln[3].

Zur Aufnahme des Prüflings diente eine besondere Belastungsvorrichtung *B*, die ein in sich geschlossenes System darstellte und möglichst stabil gebaut war. Die obere Platte *G* aus Stahl konnte ausgewechselt werden. Sie war mit einer Öffnung in der Mitte und einem glatten Rand bzw. den entsprechenden Auflagespitzen versehen, gegen die dann die jeweilige Glasplatte durch den abgerundeten Stahlbolzen des Belastungshebels angedrückt wurde. Die Aufbringung der Last erfolgte als Mittel-Einzellast von unten über ein eingebautes Hebelsystem *H*, wobei die Höhe der Belastung durch Eichung ermittelt wurde. Die ganze Belastungsvorrichtung stand auf dem Tisch *T* des Interferenzgeräts und konnte mit dessen Stellschrauben so eingestellt werden, daß die einander zugekehrten Flächen von *P* und *V* parallel zueinander

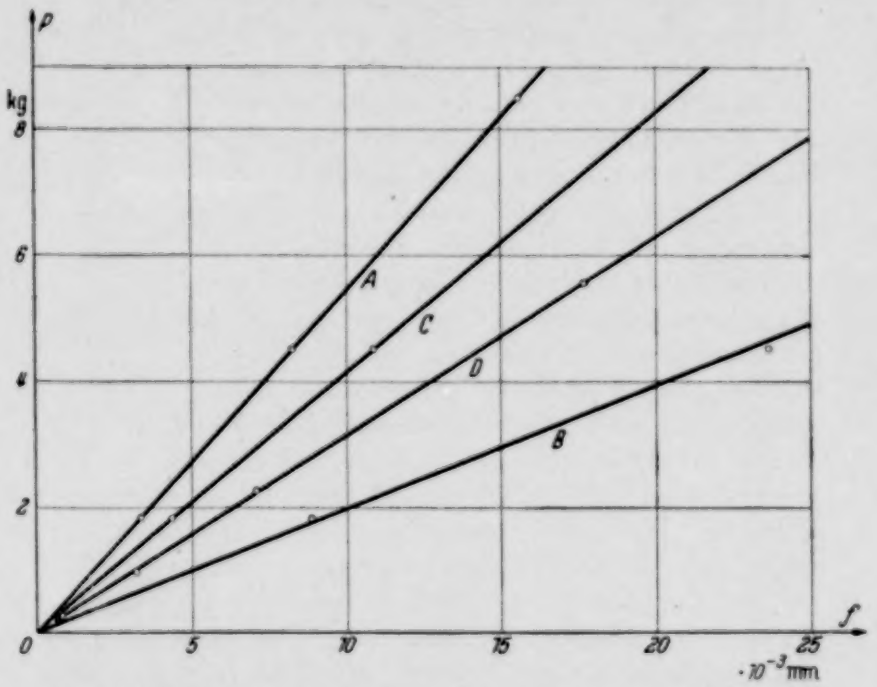


Abb. 3. Abhängigkeit der gemessenen Biegepfeile f von der Belastung P.

[1] Vgl. z. B. *S. Tolansky*, Phys. Bl. 4 (1948), S. 472.

[2] Hier sei eine Erscheinung erwähnt, die auch bei sorgfältigster Bearbeitung während des Mattierens der einen Seite der ursprünglich doppelseitig polierten Glasplatte stets auftrat, und zwar bei allen Platten etwa im gleichen Ausmaß: Es zeigte sich, daß die nicht mattierte Fläche konkav wurde, die ganze Platte sich also — vermutlich als Folge verminderter Oberflächenspannung — durchgebogen haben mußte.

[3] *R. Landwehr* und *A. Dose*, Naturwiss. 36 (1949), S. 342.

standen. — Abb. 2 zeigt das System der Interferenzstreifen (Höhenschichtlinienbild) für den Fall der an drei Randpunkten frei aufliegenden kreisförmigen Platte.

3. Meßergebnisse. Gemessen wurden nur die Biegepfeile durch Auszählen der Interferenzstreifen. Die gemessenen Werte, die einzeln allerhöchstens bis zu 4% streuten, wurden graphisch ausgeglichen. Abb. 3 zeigt die Proportionalität der Meßpunkte mit der Belastung. An diesen verbesserten Werten wurde dann noch eine Korrektur angebracht, die die noch vorhandene Deformation der Belastungsvorrichtung berücksichtigt. Dieser Anteil liegt in der Größenordnung von einigen $1 \cdot 10^{-4}$ mm. Diese korrigierten Werte sind als Messung in die folgende Tabelle 1 eingetragen. Die Tabelle enthält die Zusammenstellung der vier untersuchten Fälle mit den Ergebnissen.

Tabelle 1. *Gemessene und berechnete Biegepfeile bei den untersuchten Biegefällen.*

Reihe	Platte	Auflage	Belastung in kg	$f \cdot 10^{-3}$ mm gemessen (korr.)	$f \cdot 10^{-3}$ mm theoretisch	Abweichg. in % des theoret. Wertes	$f \cdot 10^{-3}$ mm theoretisch	Abweichg. in % des theoret. Wertes
A	I (BK 7) ∅ 50 mm h = 2,8 mm	2r = 48 mm am Rand frei aufliegend			(K)		(H)	
			1,83	3,62	3,68	− 1,5	3,55	+ 2,0
			4,505	8,92	9,05	− 1,4	8,75	+ 1,9
			8,518	16,88	17,11	− 1,3	16,55	+ 2,0
B	III (RG 1) ∅ 46 mm h = 1,9 mm	2r = 43,8 mm am Rand frei aufliegend			(Sch)			
			1,83	9,45	10,59	11	—	—
			4,505	23,37	26,07	10	—	—
C	I (BK 7) ∅ 50 mm h = 2,8 mm	2r = 48,4 mm an 3 Randpunkten in 120° Abstand frei aufliegend			(K)		(H)	
			1,83	4,64	4,69	− 1,1	4,57	+ 1,5
			4,505	11,42	11,55	− 1,1	11,25	+ 1,5
D	VI (F 3) 79,6 × 79,3 mm h = 4,9 mm	2a = 74,5 mm an 4 Eckpunkten frei aufliegend			(K)		(H)	
			0,266	0,87	0,886	− 1,8	0,847	+ 2,7
			0,952	3,12	3,17	− 1,6	3,03	+ 3,0
			2,265	7,41	7,54	− 1,7	7,22	+ 2,6
			5,585	18,28	18,60	− 1,7	17,79	+ 2,8

4. Vergleich mit der Theorie. Die Berechnung der theoretischen Werte erfolgte nach *Föppl*[1] bzw. *Nádai*[2]. Für den Biegepfeil einer frei am Rande aufliegenden kreisförmigen Platte mit dem Halbmesser r und der Dicke h gilt bei Einwirkung einer Mittel-Einzellast P

$$f_1 = \frac{P r^2}{E h^3} \cdot \frac{3(1-\mu)(3+\mu)}{4\pi},$$

(E = Elastizitätsmodul, μ = *Poisons*che Zahl).

Für den Fall C der an drei Randpunkten aufliegenden kreisförmigen Platte wurde die Durchbiegung in der Mitte unter der Einwirkung einer Mitteleinzellast P in der von *A. Nádai* angegebenen Weise (Auflösung der Plattengleichung in Polarkoordinaten mit Hilfe eines Reihenansatzes unter Berücksichtigung der bestehenden Randbedingungen) berechnet. Es ergibt sich ein Biegepfeil

$$f' = \frac{P r^2}{E h^3} \cdot \frac{1-\mu^2}{3+\mu} \cdot \frac{1}{\pi} \left(0{,}592 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot 0.769\right),$$

der noch zu dem obenstehenden Wert f_1 hinzuzufügen ist. Der gesamte Biegepfeil ist also $f_2 = f_1 + f'$. Bei einer an vier Eckpunkten frei aufliegenden quadratischen Platte mit der Kantenlänge 2a und der Dicke h erhält man für die Pfeilhöhe unter dem Einfluß einer Einzellast P in der Mitte entsprechend der Entwicklung von *Föppl*[3]

$$f_3 = \frac{P a^2}{E h^3} \cdot 192\,(1-\mu^2) \cdot \frac{\pi^2 - 8\mu}{\pi^6 - 64\,\pi^2\,\mu^2}.$$

---

[1] *A.* und *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 1, 2. Aufl. München und Berlin 1924.

[2] *A. Nádai*, Die elastischen Platten, Berlin 1925.

[3] Die Formeln für die an drei Randpunkten aufliegende kreisförmige und für die quadratische Platte wurden in dieser vollständigen Form angegeben, um eine Berechnung für beliebige *Poisson*sche Zahlen, die manchmal, wie im vorliegenden Fall, erwünscht ist, zu ermöglichen. Aus den angeführten Literaturstellen sind die Formeln nicht ohne weiteres zu entnehmen.

Der Berechnung der Biegepfeile wurden die von *Kunert*[1] und *Hoesch*[2] angegebenen Werte für die elastischen Konstanten bzw. im Falle des Farbglases (*B*) der sich aus der Zusammensetzung ergebende, nur sehr angenähert geltende Wert für den Elastizitätsmodul[3] zugrunde gelegt (*K* und *H* bzw. *Sch* in Tabelle 1). Leider konnten die Konstanten seinerzeit nicht an den Versuchsplatten selbst bestimmt werden.

Tabelle 1 enthält neben den berechneten Biegepfeilen die Abweichung der gemessenen Werte von den berechneten in Prozent der letzteren. In den Fällen *A*, *C* und *D* ist die Übereinstimmung sehr gut, besonders, wenn man annimmt, daß die noch verbleibenden Abweichungen weitgehend reell sind. Diese Annahme liegt nahe, da hier die Abweichungen für die beiden Wertepaare E, μ verschiedene Vorzeichen haben und meist größer sind, als den möglichen Fehlern entspricht. Auch im vorliegenden Fall werden also die näherungsweise abgeleiteten Formeln, insbesondere auch für die an drei Randpunkten aufliegende kreisförmige Platte und die quadratische Platte, erneut bestätigt. Bei der an drei Randpunkten frei aufliegenden kreisförmigen Platte ist der Biegepfeil um 28% größer als bei der am Rande frei aufliegenden Platte. Für das Verhältnis der Größe der Biegepfeile in diesen beiden Fällen zueinander fallen die durch die Deformation der Belastungsvorrichtung und durch die allenfalls noch vorhandene Unsicherheit des Elastizitätsmoduls bedingten Fehler fort, da es sich beide Male um dieselbe Platte und dieselben Belastungen handelt. Die mitgeteilten Versuche unterscheiden sich von den von *Nádai* durchgeführten, abgesehen von dem benutzten Verfahren, auch dadurch, daß im vorliegenden Fall dickere Platten untersucht wurden (das Verhältnis $h/2r$ ist im Mittel 1/20 gegenüber 1/120 bei *Nádai*).

5. Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Berechnet man umgekehrt den Elastizitätsmodul mit der Annahme eines mittleren μ-Wertes (für *BK* 7 $\mu=0{,}21$, für *F* 3 und *RG* 1 $\mu=0{,}22$), so erhält man für *BK* 7 und *F* 3 die in der Tabelle 2 angeführten Werte. Eine Fehlerdiskussion ergibt als mittleren Fehler des Mittelwertes den in der letzten Spalte angegebenen Betrag[4].

Tabelle 2. *Gegenüberstellung der gemessenen Elastizitätsmoduln (in kg/mm²) für zwei Glassorten.*

Beobachter	Verfahren	Glassorten		Genauigkeit
		BK 7	F 3	
Kunert	Ultraschall	7931	5579	± 1%
Hoesch	Ultraschall	8170	5893	± 0,6%
Landw.-Gr.	Plattenbiegung	8015	5736	± 1,1%

Für die Farbglasplatte wurde ein Elastizitätsmodul von 8101 kg/mm² gefunden (gegenüber einem zunächst eingesetzten Wert von 7378 kg/mm²). Allerdings ergibt sich für die Genauigkeit dieses Mittelwertes nur 2,5% wegen der größeren Streuung der Meßwerte. Zum Vergleich enthält Tabelle 2 die von *Kunert* und *Hoesch* gemessenen Werte sowie die von ihnen erreichte Meßgenauigkeit. Die noch vorhandenen Schwankungen des Elastizitätsmoduls erklären sich wohl aus dem Unterschied der verschiedenen Schmelzen. Jedenfalls ist eine Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Benutzung der Plattenbiegung mit etwa derselben Genauigkeit möglich wie bei Anwendung der Lichtbrechung an Ultraschallwellen bzw. bei dem Verfahren der sekundären Interferenzen.

Auf der einen Seite läßt sich also mit Hilfe der Lichtinterferenzen der Elastizitätsmodul genau bestimmen. Auf der anderen Seite kann man aber auch, wie gezeigt wurde, bei beliebigen Fällen von Biegung oder Deformation eine Kontrolle theoretischer Ableitungen vornehmen oder, wo eine theoretische Berechnung nicht oder nur mit großem Aufwand möglich ist, die Durchbiegung – auch über eine größere Fläche hinweg – rein empirisch bestimmen bzw. auch unbekannte auf bekannte Belastungsfälle zurückführen.

[1] *D. Kunert*, Glastechn. Ber. 16 (1938), S. 383.
[2] *K. Hoesch*, Z. Phys. 109 (1938), S. 606.
[3] Nach einer freundlichen Mitteilung der Firma Schott u. Gen., Jena.
[4] Bei sehr genauen Messungen ist unter Umständen eine Korrektur wegen des überstehenden Randes erforderlich und für den Fall der am Rande frei aufliegenden kreisförmigen Platte die strenge Formel (vgl. z. B. *A. E. H. Love*, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. S. 475, 4. Aufl. New York 1944) anzuwenden.

(Eingegangen am 20. Dezember 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Rudolf Landwehr*, (21b) Menden (Kreis Iserlohn), Iserlohner Straße 19.

Graphische Bestimmung der Spiegelbewegungen beim Differentialwasserschloß von Johnson.

Von H. Weirich.

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit[1] befaßt sich mit der Ermittlung der Spiegelbewegungen im Differentialwasserschloß von *Johnson* durch ein graphisches Integrationsverfahren, das durch Erweiterung der von *L. Mühlhofer*[2] für ungedämpfte Wasserschlösser entwickelten zeichnerischen Lösungsmethode gewonnen wurde. Dieses *Mühlhofer*sche Verfahren, das bis zur zweiten Näherung genau ist, und von *K. Karas*[3] auch auf gedämpfte Wasserschlösser ausgedehnt werden konnte, wurde deshalb als Ausgang für die folgenden Untersuchungen gewählt, weil es von den vorhandenen graphischen Verfahren wohl das schärfste ist und für die Praxis die besten Ergebnisse liefert. Es gestattet die Bestimmung der Spiegelstände und der Wassergeschwindigkeit im Stollen für jeden Zeitpunkt des Schwingungsvorganges, und so war es naheliegend, diese Verfahren auch auf das Differentialwasserschloß zu übertragen. Durch wesentliche Erweiterungen ist es gelungen, die Bewegungsvorgänge auch in diesem Wasserschloßtyp hinreichend genau zu bestimmen. Das beweisen die Ergebnisse der behandelten Beispiele, die durchweg mit einer vom Verfasser an anderer Stelle angegebenen analytischen Lösungsmethode oder mit Ergebnissen anderer Untersuchungen verglichen wurden.

2. Allgemeines. Um beim gedämpften Wasserschloß die im Durchtrittsquerschnitt im Beckenboden (Widerstand) auftretenden Drücke, die zu Beginn einer Belastung (Eröffnung) bzw. Entlastung (Drosselung) der Turbinen Größtwerte annehmen und für Stollen und Druckrohrleitung plötzliche gefährliche zusätzliche Drücke darstellen, zu verringern, ordnete *Johnson* im Becken des Wasserschlosses ein Zentralrohr an, das bei Belastungssteigerung im ersten Augenblick die fehlende Wassermenge liefert, bei Entlastung die überschüssige Wassermenge aufnimmt.

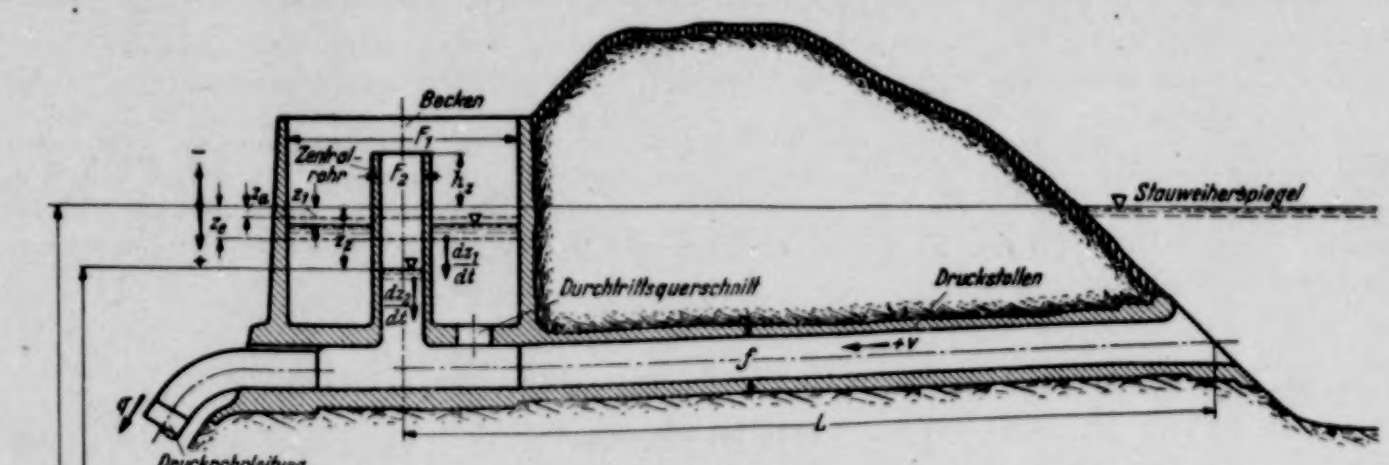


Abb. 1. Differentialwasserschloß von *Johnson*. Längsschnitt, Bezeichnungen und Vorzeichenfestsetzungen.

Dadurch werden die Drücke im Widerstand nicht plötzlich wirksam, sondern erstrecken sich über einen Zeitraum von einigen Sekunden und verlieren dadurch ihre gefährliche Wirkung auf die Druckrohrleitung und den Stollen.

3. Wirkungsweise. Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß die Beharrungsspiegel im Becken und Zentralrohr am Anfang einer Eröffnung von Teillast um z_a, am Ende derselben um z_e unter dem

[1] Auszug aus der Dissertation. Deutsche Techn. Hochschule, Prag 1941.

[2] *L. Mühlhofer*, Zeichnerische Bestimmung der Spiegelbewegungen in Wasserschlössern von Wasserkraftanlagen mit unter Druck durchflossenem Zulaufgerinne. Berlin 1924.

[3] *K. Karas*, Bauingenieur 22 (1941), S. 335.

Der Berechnung der Biegepfeile wurden die von *Kunert*[1] und *Hoesch*[2] angegebenen Werte für die elastischen Konstanten bzw. im Falle des Farbglases (*B*) der sich aus der Zusammensetzung ergebende, nur sehr angenähert geltende Wert für den Elastizitätsmodul[3] zugrunde gelegt (*K* und *H* bzw. *Sch* in Tabelle 1). Leider konnten die Konstanten seinerzeit nicht an den Versuchsplatten selbst bestimmt werden.

Tabelle 1 enthält neben den berechneten Biegepfeilen die Abweichung der gemessenen Werte von den berechneten in Prozent der letzteren. In den Fällen *A*, *C* und *D* ist die Übereinstimmung sehr gut, besonders, wenn man annimmt, daß die noch verbleibenden Abweichungen weitgehend reell sind. Diese Annahme liegt nahe, da hier die Abweichungen für die beiden Wertepaare E, μ verschiedene Vorzeichen haben und meist größer sind, als den möglichen Fehlern entspricht. Auch im vorliegenden Fall werden also die näherungsweise abgeleiteten Formeln, insbesondere auch für die an drei Randpunkten aufliegende kreisförmige Platte und die quadratische Platte, erneut bestätigt. Bei der an drei Randpunkten frei aufliegenden kreisförmigen Platte ist der Biegepfeil um 28 % größer als bei der am Rande frei aufliegenden Platte. Für das Verhältnis der Größe der Biegepfeile in diesen beiden Fällen zueinander fallen die durch die Deformation der Belastungsvorrichtung und durch die allenfalls noch vorhandene Unsicherheit des Elastizitätsmoduls bedingten Fehler fort, da es sich beide Male um dieselbe Platte und dieselben Belastungen handelt. Die mitgeteilten Versuche unterscheiden sich von den von *Nádai* durchgeführten, abgesehen von dem benutzten Verfahren, auch dadurch, daß im vorliegenden Fall dickere Platten untersucht wurden (das Verhältnis $h/2r$ ist im Mittel 1/20 gegenüber 1/120 bei *Nádai*).

5. Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Berechnet man umgekehrt den Elastizitätsmodul mit der Annahme eines mittleren μ-Wertes (für *BK* 7 $\mu = 0{,}21$, für *F* 3 und *RG* 1 $\mu = 0{,}22$), so erhält man für *BK* 7 und *F* 3 die in der Tabelle 2 angeführten Werte. Eine Fehlerdiskussion ergibt als mittleren Fehler des Mittelwertes den in der letzten Spalte angegebenen Betrag[4].

Tabelle 2. *Gegenüberstellung der gemessenen Elastizitätsmoduln (in kg/mm²) für zwei Glassorten.*

Beobachter	Verfahren	Glassorten		Genauigkeit
		BK 7	F 3	
Kunert	Ultraschall	7931	5579	± 1 %
Hoesch	Ultraschall	8170	5893	± 0,6 %
Landw.-Gr.	Plattenbiegung	8015	5736	± 1,1 %

Für die Farbglasplatte wurde ein Elastizitätsmodul von 8101 kg/mm² gefunden (gegenüber einem zunächst eingesetzten Wert von 7378 kg/mm²). Allerdings ergibt sich für die Genauigkeit dieses Mittelwertes nur 2,5 % wegen der größeren Streuung der Meßwerte. Zum Vergleich enthält Tabelle 2 die von *Kunert* und *Hoesch* gemessenen Werte sowie die von ihnen erreichte Meßgenauigkeit. Die noch vorhandenen Schwankungen des Elastizitätsmoduls erklären sich wohl aus dem Unterschied der verschiedenen Schmelzen. Jedenfalls ist eine Bestimmung des Elastizitätsmoduls unter Benutzung der Plattenbiegung mit etwa derselben Genauigkeit möglich wie bei Anwendung der Lichtbrechung an Ultraschallwellen bzw. bei dem Verfahren der sekundären Interferenzen.

Auf der einen Seite läßt sich also mit Hilfe der Lichtinterferenzen der Elastizitätsmodul genau bestimmen. Auf der anderen Seite kann man aber auch, wie gezeigt wurde, bei beliebigen Fällen von Biegung oder Deformation eine Kontrolle theoretischer Ableitungen vornehmen oder, wo eine theoretische Berechnung nicht oder nur mit großem Aufwand möglich ist, die Durchbiegung – auch über eine größere Fläche hinweg – rein empirisch bestimmen bzw. auch unbekannte auf bekannte Belastungsfälle zurückführen.

[1] *D. Kunert*, Glastechn. Ber. 16 (1938), S. 383.
[2] *K. Hoesch*, Z. Phys. 109 (1938), S. 606.
[3] Nach einer freundlichen Mitteilung der Firma Schott u. Gen., Jena.
[4] Bei sehr genauen Messungen ist unter Umständen eine Korrektur wegen des überstehenden Randes erforderlich und für den Fall der am Rande frei aufliegenden kreisförmigen Platte die strenge Formel (vgl. z. B. *A. E. H. Love*, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. S. 475, 4. Aufl. New York 1944) anzuwenden.

(Eingegangen am 20. Dezember 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Rudolf Landwehr*, (21b) Menden (Kreis Iserlohn), Iserlohner Straße 19.

Graphische Bestimmung der Spiegelbewegungen beim Differentialwasserschloß von Johnson.

Von **H. Weirich.**

1. Einleitung. Die vorliegende Arbeit[1] befaßt sich mit der Ermittlung der Spiegelbewegungen im Differentialwasserschloß von *Johnson* durch ein graphisches Integrationsverfahren, das durch Erweiterung der von *L. Mühlhofer*[2] für ungedämpfte Wasserschlösser entwickelten zeichnerischen Lösungsmethode gewonnen wurde. Dieses *Mühlhofer*sche Verfahren, das bis zur zweiten Näherung genau ist, und von *K. Karas*[3] auch auf gedämpfte Wasserschlösser ausgedehnt werden konnte, wurde deshalb als Ausgang für die folgenden Untersuchungen gewählt, weil es von den vorhandenen graphischen Verfahren wohl das schärfste ist und für die Praxis die besten Ergebnisse liefert. Es gestattet die Bestimmung der Spiegelstände und der Wassergeschwindigkeit im Stollen für jeden Zeitpunkt des Schwingungsvorganges, und so war es naheliegend, diese Verfahren auch auf das Differentialwasserschloß zu übertragen. Durch wesentliche Erweiterungen ist es gelungen, die Bewegungsvorgänge auch in diesem Wasserschloßtyp hinreichend genau zu bestimmen. Das beweisen die Ergebnisse der behandelten Beispiele, die durchweg mit einer vom Verfasser an anderer Stelle angegebenen analytischen Lösungsmethode oder mit Ergebnissen anderer Untersuchungen verglichen wurden.

2. Allgemeines. Um beim gedämpften Wasserschloß die im Durchtrittsquerschnitt im Beckenboden (Widerstand) auftretenden Drücke, die zu Beginn einer Belastung (Eröffnung) bzw. Entlastung (Drosselung) der Turbinen Größtwerte annehmen und für Stollen und Druckrohrleitung plötzliche gefährliche zusätzliche Drücke darstellen, zu verringern, ordnete *Johnson* im Becken des Wasserschlosses ein Zentralrohr an, das bei Belastungssteigerung im ersten Augenblick die fehlende Wassermenge liefert, bei Entlastung die überschüssige Wassermenge aufnimmt.

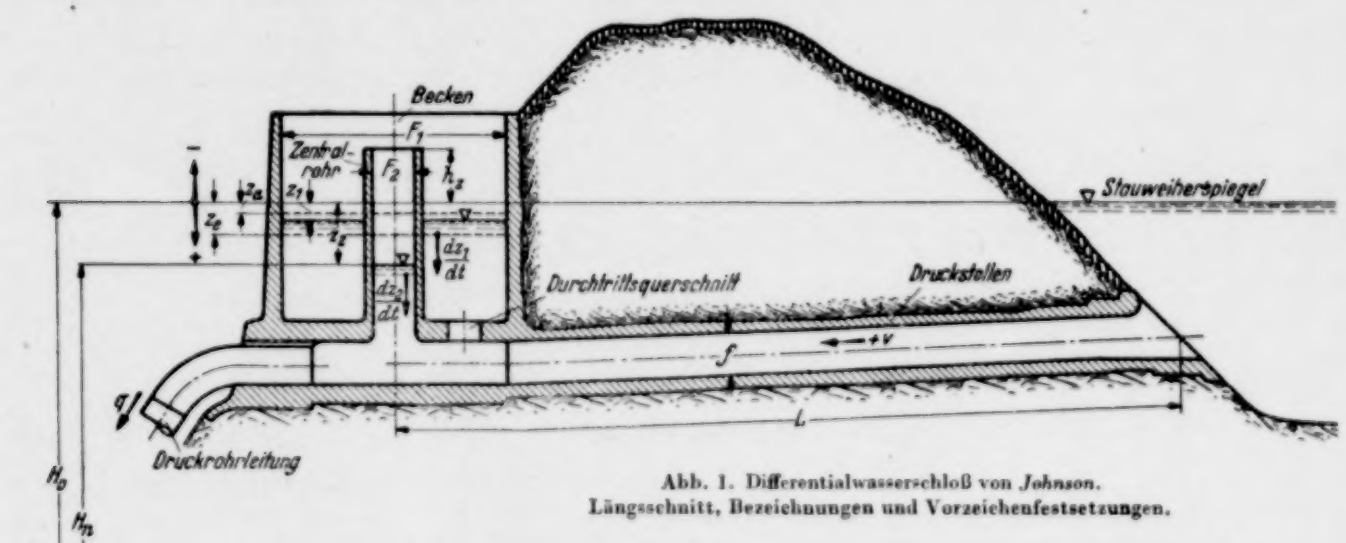


Abb. 1. Differentialwasserschloß von *Johnson*. Längsschnitt, Bezeichnungen und Vorzeichenfestsetzungen.

Dadurch werden die Drücke im Widerstand nicht plötzlich wirksam, sondern erstrecken sich über einen Zeitraum von einigen Sekunden und verlieren dadurch ihre gefährliche Wirkung auf die Druckrohrleitung und den Stollen.

3. Wirkungsweise. Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß die Beharrungsspiegel im Becken und Zentralrohr am Anfang einer Eröffnung von Teillast um z_a, am Ende derselben um z_e unter dem

[1] Auszug aus der Dissertation. Deutsche Techn. Hochschule, Prag 1941.

[2] *L. Mühlhofer*, Zeichnerische Bestimmung der Spiegelbewegungen in Wasserschlössern von Wasserkraftanlagen mit unter Druck durchflossenem Zulaufgerinne. Berlin 1924.

[3] *K. Karas*, Bauingenieur 22 (1941), S. 335.

Niveau des Stauweihers auf gleicher Höhe liegen. Hierbei sind z_a und z_e die Verlustdruckhöhen, herrührend von der Reibung im Stollen. Werden die Turbinen belastet oder entlastet, so wird die fehlende bzw. überschüssige Wassermenge zunächst ausschließlich dem Zentralrohr entnommen oder zugeführt, weil im Widerstand noch keine Druckhöhe p für den Wasserdurchtritt zur Verfügung steht. Diese ist erst dann vorhanden, wenn der Zentralrohrspiegel etwas abgesunken oder angestiegen ist, und ergibt sich, von Zusatzdrücken abgesehen, immer aus der Differenz der Spiegelstände im Zentralrohr und Becken z_2-z_1.

Wegen der anfangs noch kleinen Druckhöhe ist auch die durch den Widerstand gedrückte Wassermenge viel kleiner als jene, die von den Turbinen bei Belastung angefordert oder bei Entlastung abgegeben wird. Es wird deshalb dem Zentralrohr weiter Wasser entnommen bzw. zugeführt und dadurch der Spiegel in ihm solange absinken oder ansteigen, bis schließlich jene Druckhöhe erreicht wird, die es ermöglicht, daß die ganze Fehl- bzw. Überschußwassermenge dem Becken entnommen oder zugeführt werden kann. Der diesem Zustand entsprechende Spiegelstand im Zentralrohr wird schon nach wenigen Sekunden erreicht und beschleunigt oder verzögert den Stolleninhalt in kürzerer Zeit als beim gedämpften Wasserschloß. Dadurch wird aber der neue Beharrungsspiegel wesentlich schneller erreicht.

4. Die Ausgangsgleichungen für das Differentialwasserschloß. Ebenso wie *J. Frank*[1] in seiner Arbeit vorgeht, werden auch hier die Gleichungen für Be- und Entlastungsfälle getrennt entwickelt, weil bei Entlastungen verschiedene Zustände wegen der vollkommen und unvollkommenen Überfälle über den Zentralrohrrand unterschieden werden müssen.

a) Belastungssteigerung. Mit Vernachlässigung der Elastizität des Wassers sowie der Stollen- und Wasserschloßwandungen gelten bei konstanten Becken- und Zentralrohrquerschnitten F_1 und F_2 die Raumgleichungen

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{Q_I}{F_1}, \tag{1}$$

$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{Q_{II}}{F_2}. \tag{2}$$

Hierin bedeuten dz_1/dt und dz_2/dt die Spiegelgeschwindigkeiten im Becken und Zentralrohr. Die durch den Widerstand strömende Wassermenge Q_I in (1) bestimmt man nach *J. Frank*[2] mit Hilfe der Bedingung

$$p=k=k_0\left(\frac{Q_I}{Q_0}\right)^2, \tag{3}$$

in der k bzw. k_0 die Druckverluste im Widerstand, die sich bei Annahme eines quadratischen Widerstandsgesetzes mit α_1 als Dämpfungsbeiwert und den Stollengeschwindigkeiten v und v_0 beim Durchfluß einer Wassermenge Q und der Vollastwassermenge Q_0 zu $\alpha_1 v^2$ und $\alpha_1 v_0^2$ ergeben. Geht man in (3) mit $p=z_2-z_1$, $k_0=\alpha_1 v_0^2$ und $Q_0=f v_0$, wobei f den Stollenquerschnitt bedeutet, ein, so erhält man

$$Q_I=f\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Die dem Zentralrohr entnommene Wassermenge Q_{II} ergibt sich aus der Beziehung

$$Q_{II}=(q-Q)-Q_I, \tag{5}$$

worin q die den Turbinen durch die Druckrohrleitung zufließende Wassermenge darstellt. Führt man in (5) $q=f c$, wobei c jene gedachte Wassergeschwindigkeit ist, die vorhanden wäre, wenn q allein den Stollen durchfließen würde, und $Q=f v$ ein, so wird mit Beachtung von (4)

$$Q_{II}=f\left[c-v-\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{6}$$

In den Gleichungen (4) und (6) ist z_2-z_1 immer mit dem Absolutwert einzusetzen. Wegen der für z gewählten Zählrichtung sind bei fallenden Spiegeln dz_1/dt, dz_2/dt und damit Q_I und Q_{II} – da $(q-Q)-Q_I>0$ – positiv, bei ansteigenden Spiegeln negativ. Dies erreicht man durch entsprechende Vorzeichenfestsetzung des Gliedes $\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei gilt:

$$\left.\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}\right\}\text{ Vorzeichen bei }\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}\text{ für }\left\{\begin{matrix}\text{fallende Spiegel}\\ \text{ansteigende Spiegel.}\end{matrix}\right.$$

---

[1] *J. Frank*, Dtsch. Wasserw. 27 (1932), S. 101.

[2] *J. Frank*, a. a. O., S. 102.

Die Stollenwassermenge wird durch die Zentralrohrspiegelhöhe z_2 beschleunigt. Wird konstante Stauweiherspiegelhöhe angenommen und die Trägheit der Wassermassen im Weiher und Wasserschloß vernachlässigt, so erhält man mit Benützung der dynamischen Grundgleichung die Beschleunigungsgleichung

$$\frac{L}{g}\frac{dv}{dt} = z_2 \mp h = z_2 \mp \alpha v^2 . \tag{7}$$

In dieser Beziehung bedeuten L die Stollenlänge, dv/dt die Beschleunigung der Stollenwassermasse und h die Verlusthöhe im Stollen, die sich bei quadratischem Widerstandsgesetz mit dem Reibungsbeiwert α zu αv^2 ergibt.

Strömt die Stollenwassermasse vom Stauweiher zum Wasserschloß ($v > 0$), so wird die Druckhöhe z_2 um die Verlusthöhe h vermindert, bei umgekehrter Strömungsrichtung ($v < 0$) vergrößert. Es gilt somit

$$\left.\begin{matrix}\text{oberes}\\ \text{unteres}\end{matrix}\right\} \text{Vorzeichen bei } \alpha v^2 \text{ für } v \begin{cases} > 0 \\ < 0 . \end{cases}$$

b) Entlastung. Hier müssen verschiedene Zustände des Bewegungsvorganges im Becken und Zentralrohr bei der Entwicklung der Grundgleichungen berücksichtigt werden. *J. Frank*[1] unterscheidet fünf Zustände, die sich bei teilweisen Drosselungsfällen auf zwei reduzieren lassen.

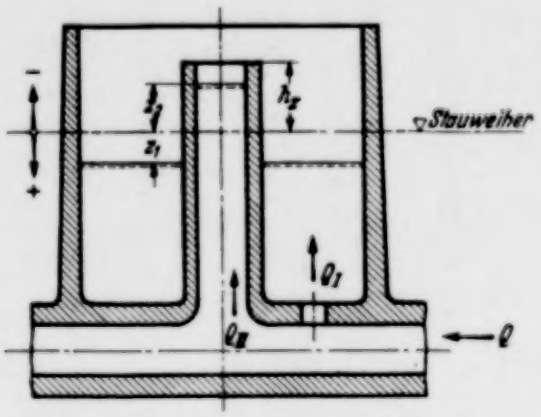


Abb. 2. Zustand I.

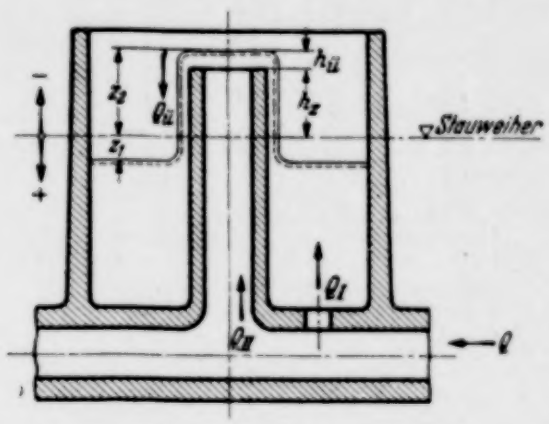


Abb. 3. Zustand II.

Zustand I. Dieser währt nach Abb. 2, solange die Spiegellage z_2 unter dem Zentralrohrrand liegt. Es gelten die Gleichungen (1) und (2). Da bei Beginn des Bewegungsvorganges die Spiegel ansteigen, sind dz_1/dt, dz_2/dt und damit Q_I und Q_{II} — da $(q-Q)-Q_I < 0$ — negativ.

Zustand II. Hat der Zentralrohrspiegel den Zentralrohrrand erreicht, so fällt die Wassermenge Q_{II} in das Becken über (Abb. 3). Während dieses Zustandes liegt der Beckenspiegel unter dem Zentralrohrrand, so daß ein vollkommener Überfall eintritt. Somit ergeben sich die Raumgleichungen

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q_I + Q_{\ddot{u}}}{F_1} , \tag{8}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{Q_{II} - Q_{\ddot{u}}}{F_2} , \tag{9}$$

mit der Überfallwassermenge $Q_{\ddot{u}} = \frac{2}{3}\mu_1 B \sqrt{2g}\, h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$. Hierin sind μ_1 der Überfallbeiwert, $B = \pi D_2$ die Überfallbreite mit dem Zentralrohrdurchmesser D_2 und $h_{\ddot{u}}$ die Überfallhöhe. Mit $\frac{2}{3}\mu_1 B \sqrt{2g} = C_1$ folgt der für die weiteren Betrachtungen einfachere Wert $Q_{\ddot{u}} = C_1 h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$. Die Größen Q_I, Q_{II} und $Q_{\ddot{u}}$ sind für diesen Zustand negativ.

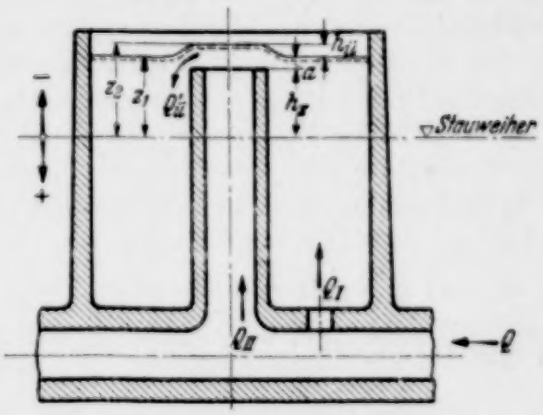


Abb. 4. Zustand III.

Zustand III. Sobald auch der Beckenspiegel den Zentralrohrrand erreicht hat, geht der vollkommene Überfall in einen unvollkommenen über (Abb. 4). Die Gleichungen für Becken und Zentralrohr lauten jetzt

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{Q_I + Q'_{\ddot{u}}}{F_1} , \tag{10}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{Q_{II} - Q'_{\ddot{u}}}{F_2} , \tag{11}$$

[1] *J. Frank*, a. a. O., S. 103.

wobei sich die Überfallwassermenge mit dem weiteren Überfallbeiwert μ_2 zu $Q'_{\ddot{u}} = \frac{2}{3}\mu_1 B\sqrt{2g}\,h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \mu_2 B a\sqrt{2g}\,h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ ergibt. Mit $\mu_2 B\sqrt{2g} = C_2$ wird $Q'_{\ddot{u}} = C_1 h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + C_2 a h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$. Die Größen Q_I, Q_{II} und $Q'_{\ddot{u}}$ sind für diesen Zustand ebenfalls negativ.

Zustand IV. Liegen die Spiegel im Becken und Zentralrohr schließlich auf gleicher Höhe, so wird im Falle vollständiger Entlastung der Turbinen $q=0$ und in diesem Augenblick auch die Stollenwassermenge $Q=0$. Im nächsten Moment wird $Q<0$, d. h. es strömt Wasser im Stollen vom Wasserschloß zum Stauweiher zurück. Diese Wassermenge wird zunächst wieder, weil keine Druckhöhe p im Widerstand wegen der gleichen Spiegellagen im Becken und Zentralrohr zur Verfügung steht, ganz dem Zentralrohr entnommen. Durch die entstehende Spiegelsenkung im Zentralrohr tritt aber ein unvollkommener Überfall aus dem Becken in das Zentralrohr ein (Abb. 5). Auch für diesen Zustand gelten die Gleichungen (10) und (11), nur werden jetzt Q_I, Q_{II} und $Q'_{\ddot{u}}$ positiv.

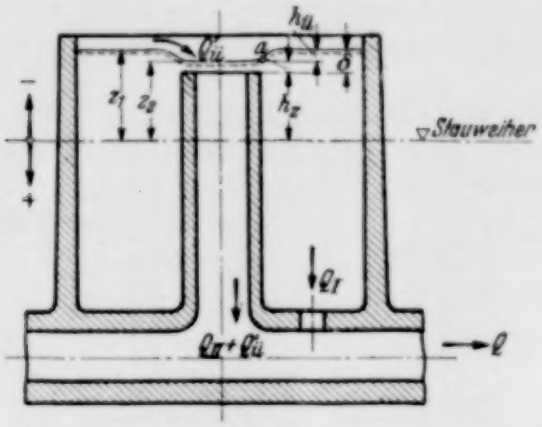


Abb. 5. Zustand IV.

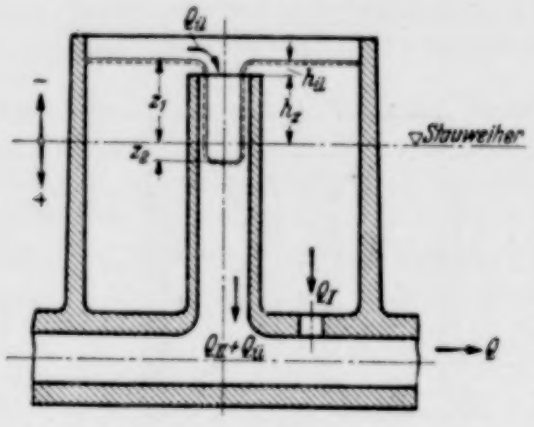


Abb. 6. Zustand V.

Zustand V. Ist der Zentralrohrspiegel bis zur Rohroberkante abgesunken, so geht der unvollkommene Überfall wieder in einen vollkommenen über (Abb. 6), und es haben erneut die Gleichungen (8) und (9) Gültigkeit. Die Größen Q_I, Q_{II} und $Q_{\ddot{u}}$ sind nun jedoch positiv.

Ist schließlich auch der Beckenspiegel bis zur Rohroberkante abgesunken, so herrscht wieder Zustand I mit den Gleichungen (1) und (2), allerdings mit positivem Q_I und Q_{II}.

Auch bei Entlastungsfällen gilt die Beschleunigungsgleichung (7) unter Beachtung des Vorzeichens von αv^2 bei den einzelnen Zuständen nach den angegebenen Regeln.

5. Darstellung der Ausgangsgleichungen für das zeichnerische Lösungsverfahren. In diesem Abschnitt werden die für das graphische Verfahren notwendigen Gleichungen für die Grundform des Differentialwasserschlosses entwickelt. Für Varianten dieses Wasserschlosses, z. B. mit eingebautem Widerstand im Zentralrohr, mit Schlitzen in diesem, die Zusatzdrücke darstellen oder mit Überläufen ist das Verfahren ähnlich, nur werden die Gleichungen schwieriger. Wegen der Verschiedenheit des Verfahrens für die Schwingungsvorgänge bei konstantem sekundlichen Wasserverbrauch und konstanter Leistung erfolgt im folgenden eine getrennte Behandlung der Vorgänge.

A. Schwingungsvorgänge bei konstantem sekundlichen Wasserverbrauch. a) Belastungssteigerung. Aus den Gleichungen (1) und (2) entstehen mit Verwendung von (4) und (6) die Beziehungen

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \tag{1a}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{e-v-\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}, \tag{2a}$$

wobei $\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ mit positivem Vorzeichen einzusetzen ist. Die Beschleunigungsgleichung (7) geht

mit Verwendung von (3) bei gleichzeitiger Beachtung von (1) in

$$\frac{L}{g}\frac{dv}{dt} = z_1 \mp \alpha v^2 \pm \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \tag{7a}$$

über. Damit gilt ebenfalls

$$z_2 - z_1 = \pm \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 = p. \tag{3a}$$

Wegen (3) findet man in dem Glied $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2$ den Druckverlust k im Beckenwiderstand wieder, der sich beim Absinken des Beckenspiegels als Druckverlust im Stollen gegenüber dem Beckenboden darstellt und beschleunigend auf die Stollenwassermasse wirkt. Bei Spiegelanstieg gilt die umgekehrte Überlegung. Für die Vorzeichenfestsetzung folgt daher

$$\left.\begin{matrix}\text{oberes}\\ \text{unteres}\end{matrix}\right\} \text{Vorzeichen bei } \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \text{ für } \frac{dz_1}{dt} \begin{cases} > 0 \\ < 0. \end{cases}$$

In den Gleichungen (1a), (2a) und (7a) wurde die Zentralrohrdämpfung nicht berücksichtigt, weil sie in den meisten Fällen praktisch ohne Einfluß ist[1]. Sie wird auch in den weiteren Betrachtungen nicht beachtet.

b) Entlastung. Zustand I. Es gelten die Gleichungen (1a) und (2a), jedoch jetzt mit negativem $\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$-Glied.

Zustand II. Die Gleichungen (8) und (9) gehen wegen $Q_{\ddot{u}} = C_1 h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ über in

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \tag{8a}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v - \left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}}{\frac{F_2}{f}}, \tag{9a}$$

wobei nach Abb. 3 die Beziehung $h_{\ddot{u}} = z_2 - h_s$ mit der Zentralrohrhöhe h_s gilt. Da $Q_{\ddot{u}}$ für diesen Zustand negativ ist, muß $h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ negativ eingesetzt werden. $\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist ebenfalls wieder negativ.

Zustand III. Die Gleichungen (10) und (11) lauten hier

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \frac{C_2}{f} a h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \tag{10a}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v - \left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} - \frac{C_2}{f} a h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}. \tag{11a}$$

Die veränderliche Größe a ist immer absolut einzusetzen. Sie errechnet sich nach Abb. 4 zu $a = z_1 - h_s$. Ebenfalls nach Abb. 4 findet man jetzt $h_{\ddot{u}} = z_2 - z_1$. Mit Hilfe der letzten Beziehung

---

[1] Handelt es sich um Konstruktionen, bei welchen auch im Zentralrohr ein Widerstand mit dem Dämpfungsbeiwert α_2 eingebaut ist, dann gehen die Gleichungen (1a), (2a) und (7a) durch Einführung des Zentralrohrdämpfungsgliedes $\alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2$ in die folgenden Gleichungen über:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\left[\frac{z_2 - z_1 \pm \alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2}{\alpha_1}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v - \left[\frac{z_2 - z_1 \pm \alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2}{\alpha_1}\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}},$$

$$\frac{L}{g}\frac{dv}{dt} = z_1 \mp \alpha v^2 \pm \alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \pm \alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2.$$

Das $\alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2$-Glied erhält wieder das $\left.\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen für $\frac{dz_2}{dt} \begin{cases} > 0 \\ < 0. \end{cases}$

gewinnt man aus (10a) und (11a) die für das zeichnerische Verfahren besser brauchbaren Gleichungen

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \tag{10b}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v - \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}. \tag{11b}$$

$h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ und $h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ sind negativ einzuführen, weil $Q'_{\ddot{u}}$ hier negativ ist.

Zustand IV. Für diesen Zustand gelten ebenfalls die Gleichungen (10b) und (11b). Da nun $Q'_{\ddot{u}}$ positiv ist, müssen $h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ und $h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ positiv genommen werden. Man kann auch hier eine Umformung der Gleichungen vornehmen, wenn man nach Abb. 5 $a = \delta - h_{\ddot{u}}$ setzt, wobei $\delta = z_1 - h_z$ ist. Man erhält dann

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\left(\frac{C_2}{f}\delta + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{f}(C_2 - C_1) h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}}{\frac{F_1}{f}}, \tag{10c}$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v + \frac{1}{f}(C_2 - C_1) h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{C_2}{f}\delta + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}. \tag{11c}$$

Der Wert δ ist immer absolut einzusetzen. Die Überfallhöhe errechnet sich jetzt zu $h_{\ddot{u}} = z_1 - z_2$.

Zustand V. Es kommen die Gleichungen (8a) und (9a) zur Anwendung. Zu beachten ist, daß $\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ hier positiv einzusetzen sind. $h_{\ddot{u}} = z_1 - h_z$.

Für alle Zustände gilt die Beschleunigungsgleichung (7a) unter Beachtung der Vorzeichen bei αv^2 und $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2$.

B. Schwingungsvorgänge bei konstanter Leistung. Im Falle konstanter Leistungsregelung muß sich die den Turbinen zufließende Wassermenge q mit der Nutzhöhe H_n so ändern, daß $qH_n = C = \text{konst.}$ ist. Die Konstante C errechnet sich aus der Leistungsgleichung

$$N = \frac{1000\, q H_n}{75} \eta_t, \tag{12}$$

worin 1000 das spezifische Gewicht des Wassers in kg/m³ und η_t der Turbinenwirkungsgrad sind, zu

$$C = \frac{75 N}{1000 \eta_t}. \tag{13}$$

Damit wird die Geschwindigkeit

$$c = \frac{C}{f H_n} \tag{14}$$

bzw. mit $H_n = H_0 - z_2$ nach Abb. 1, worin H_0 das Rohgefälle ist,

$$c = \frac{C}{f(H_0 - z_2)}. \tag{14a}$$

Geht man mit (14a) in (2a), (9a), (11b) und (11c) ein, so erhält man sofort die entsprechenden Gleichungen für dz_2/dt beim Schwingungsvorgang konstanter Leistung. Die Gleichungen (1a), (8a), (10b) und (10c) gelten ebenso wie die Beziehungen für $h_{\ddot{u}}$, a und δ bei Entlastungsfällen auch hier unverändert. Auch die Beschleunigungsgleichung (7a) bleibt erhalten.

Besondere Beachtung ist wieder den Vorzeichen der einzelnen Glieder zu schenken.

Die bisher gewonnenen Gleichungen zur Erfassung der Bewegungsvorgänge dienen bereits für das zeichnerische Verfahren. Nun sollen aber noch einige Gleichungen angegeben werden, die zu gewissen Zeiten des Schwingungsvorganges wesentliche Vereinfachungen des Verfahrens ermöglichen. Diese Vereinfachungen bestehen darin, daß man wie *J. Frank*[1] in den gemeinsamen

[1] *J. Frank*, a. a. O., S. 105.

extremen Spiegellagen und deren Umgebung die sehr kleine Zentralrohrspeicherung vernachlässigt und annimmt, daß die gesamte Fehl- bzw. Überschußwassermenge allein dem Becken entnommen oder zugeführt wird. Diese Annahme ist zweckmäßig, weil in diesen Bereichen des Schwingungsverlaufes die kleine Druckhöhe p sich bei Beibehaltung des strengen Verfahrens nur ungenau bestimmen läßt und dadurch auch z. B. die Zähler in (1a) und (2a) ungenau werden. *Frank* führt dann die numerische Integration wie für ein gedämpftes Wasserschloß ohne Zentralrohr durch, wobei er die Druckhöhe p bestimmt, die nun im Widerstand wirksam werden muß und damit die angenäherte Spiegellage z_2 erhält.

6. Gleichungen für das vereinfachte Verfahren. Unter Zugrundelegung der obigen Überlegungen gewinnt man die folgenden Beziehungen, die außer in den gemeinsamen Extremlagen auch im Bereich vom ersten Extrempunkt des Zentralrohrspiegels bis zur ersten gemeinsamen Extremlage angewendet werden können, weil auch in diesem Bereich die Zentralrohrspeicherung klein ist. Die dabei gemachten Vernachlässigungen sind praktisch ohne Einfluß auf die gewonnenen Ergebnisse.

A. Schwingungsvorgänge bei konstantem sekundlichen Wasserverbrauch.
a) Belastungssteigerung. Bei vernachlässigter Zentralrohrspeicherung werden dz_2/dt und Q_{II} gleich Null. Die Gleichung (5) geht über in $Q_I = q - Q = f(c-v)$, und aus Gleichung (1) wird

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{c-v}{\frac{F_1}{f}}. \tag{1b}$$

Damit folgt die Druckhöhe p wegen (3) zu

$$p = \pm \alpha_1 (c-v)^2 \tag{3b}$$

und der Spiegelstand im Zentralrohr

$$z_2 = z_1 \pm \alpha_1 (c-v)^2 .$$

Das Vorzeichen von dz_1/dt in (1b) ergibt sich aus der Differenz $c-v$ mit Beachtung der Zählrichtung für v. Für das Vorzeichen von z_2 ist zu beachten:

$$\left.\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}\right\} \text{Vorzeichen von } \alpha_1(c-v)^2 \text{ für } \left\{\begin{matrix}\text{fallenden Beckenspiegel}\\ \text{ansteigenden Beckenspiegel.}\end{matrix}\right.$$

Die Gleichungen (1b), (3b) und $z_2 = z_1 \pm \alpha_1 (c-v)^2$ finden auch für den zweiten gemeinsamen Extrempunkt und seine Umgebung bei Entlastungen Anwendung.

b) Entlastung. Für Zustand I und V darf das vereinfachte Verfahren wegen der großen Spiegeländerungen im Zentralrohr nicht verwendet werden.

Zustand II. Die Gleichung (8a) bleibt bestehen. Der Wert (9a) gleich Null gesetzt, ergibt mit Beachtung von $z_2 = h_s + h_{\ddot{u}}$

$$c - v = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} (h_s + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} . \tag{15}$$

Der Klammerausdruck ist absolut zu nehmen. Für die Bestimmung von z_2 muß erst $h_{\ddot{u}}$ ermittelt werden. Dies geschieht mit dem bereits bekannten z_1 aus Gleichung (8a) nach Abb. 7 so, daß man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der Ordinate $h_{\ddot{u}}$, auf der Abszisse nach links $\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ und nach rechts $c-v$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} (h_s + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}}$ aufträgt. Die $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} (h_s + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}}$-Linie kann durch Annahme von zwei $h_{\ddot{u}}$-Werten im Bereich des vermuteten $h_{\ddot{u}}$ leicht gezeichnet werden. Die auf einem Transparentpapier aufgetragenen $\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$-Linie wird dann auf der Abszissenachse so lange verschoben, bis $c-v$ auf ihr abgeschnitten wird. Die Ordinate des Schnittpunktes ergibt die Überfallhöhe $h_{\ddot{u}}$. Mit diesem $h_{\ddot{u}}$ kann aus $z_2 = h_s + h_{\ddot{u}}$ die Größe z_2 sofort bestimmt werden.

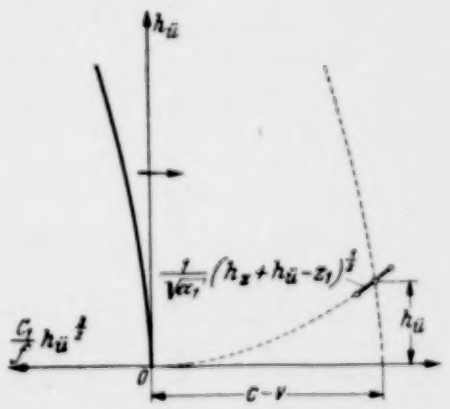


Abb. 7. Bestimmung der Überfallhöhe $h_{\ddot{u}}$ bei Zustand II.

Zustand III und IV. Die Gleichungen (10b) und (10c) gelten unverändert. Die Werte (11b) und (11c), gleich Null gesetzt, ergeben

$$c-v=\frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{C_2}{f}a+\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$c-v=\left(\frac{C_2}{f}\delta+\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{f}(C_2-C_1)\,h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Das für die Bestimmung von z_2 notwendige $h_{\ddot{u}}$ erhält man nach Abb. 8 und 9 ähnlich wie bei Zustand II. Die hierzu notwendigen Werte $a=z_1-h_s=\delta$ findet man mit dem aus (10b) und (10c) gewonnenen z_1. Mit $h_{\ddot{u}}$ erhält man z_2 für Zustand III aus $z_2=z_1+h_{\ddot{u}}$ bzw. für Zustand IV aus $z_2=z_1-h_{\ddot{u}}$.

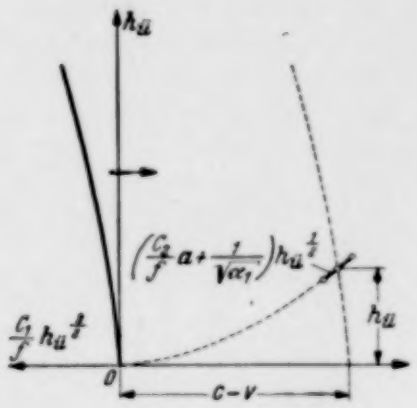


Abb. 8. Bestimmung der Überfallhöhe $h_{\ddot{u}}$ bei Zustand III.

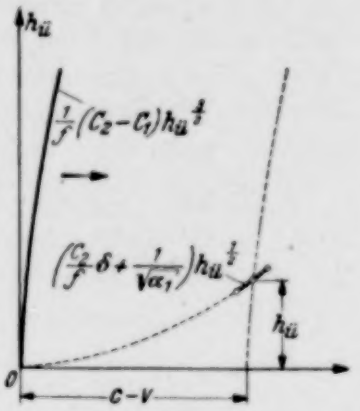


Abb. 9. Bestimmung der Überfallhöhe $h_{\ddot{u}}$ bei Zustand IV.

B. Schwingungsvorgänge bei konstanter Leistung.

a) Belastungssteigerung. Auch hier gelten die Gleichungen (1b), (3b) und $z_2=z_1+p$ mit Beachtung von (14a). Das für die Bestimmung von z_2 notwendige p kann aus Gleichung (3b) hier allerdings nicht gerechnet werden, weil c nach Gleichung (14a) eine Funktion des zunächst noch unbekannten z_2 ist. Man kann aber die Differenz z_2-z_1 wie folgt bestimmen: Die (2a) analoge Gleichung lautet für die Vorgänge konstanter Leistung mit Beachtung von (3a)

$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{\dfrac{C}{f\left\{H_0-\left[z_1\pm\alpha_1\left(\frac{F_1}{f}\right)^2\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\right\}}-v-\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}.$$

Werden hierin die Größen von höherer als zweiter Ordnung der Spiegelgeschwindigkeit dz_1/dt vernachlässigt, so erhält man

$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{\dfrac{C}{f(H_0-z_1)^2}\left[H_0-z_1\pm\alpha_1\left(\frac{F_1}{f}\right)^2\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]-v-\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}}. \tag{2b}$$

Dieser Wert, gleich Null gesetzt, ergibt

$$v-\frac{C}{f(H_0-z_1)}=\frac{\pm C(z_2-z_1)}{f(H_0-z_1)^2}-\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

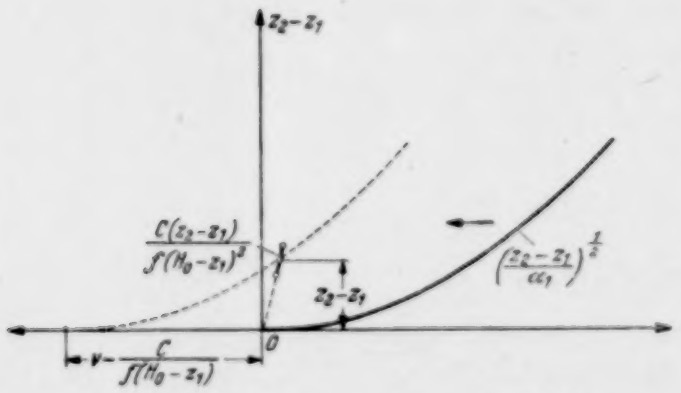


Abb. 10. Bestimmung der Spiegeldifferenz z_2-z_1.

Aus der letzten Beziehung findet man nach Abb. 10 bei bekanntem z_1 aus (1b) den Wert z_2-z_1. Damit ist aber sofort z_2 und nach Gleichung (14a) auch c bestimmt. Das obere Vorzeichen bei $\frac{C(z_2-z_1)}{f(H_0-z_1)^2}$ ist für Spiegelsenkung, das untere für Spiegelanstieg zu verwenden, wobei auch die für $\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ bereits angegebene Vorzeichenfestsetzung zu beachten ist.

Am einfachsten und schnellsten bestimmt man p aber aus der Beziehung (3a). Da außer z_1 auch dz_1/dt nach (1b) immer bekannt ist, kann p ermittelt werden. Damit sind aber nach $z_2=p+z_1$ sofort z_2 und wegen (14a) c bekannt. Die genaueren Ergebnisse erhält man jedoch durch Bestimmung von p auf die erstere Art, besonders bei Verwendung größerer Maßstäbe.

b) Entlastung. Auch hier darf für Zustand I und V das vereinfachte Verfahren nicht verwendet werden.

Zustand II bis IV. Die Gleichungen (8a), (10b) und (10c) für die Bestimmung von z_1 haben unverändert Gültigkeit. Die Gleichungen (15), (16) und (17) gehen über in

$$v = \frac{C}{f(H_0 - hz - h_{\ddot{u}})} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}(h_z + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}, \tag{15a}$$

$$v = \frac{C}{f(H_0 - z_1 - h_{\ddot{u}})} - \left(\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}, \tag{16a}$$

$$v = \frac{C}{f(H_0 - z_1 + h_{\ddot{u}})} - \left(\frac{C_2}{f} \delta + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right) h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{f}(C_2 - C_1) h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}. \tag{17a}$$

Die Bestimmung von $h_{\ddot{u}}$ geschieht wie bei konstantem Wasserverbrauch, nur ist z. B. bei Zustand II in Abb. 7 die $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}(h_z + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}}$-Linie durch die $\frac{C}{f(H_0 - h_z - h_{\ddot{u}})} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}(h_z + h_{\ddot{u}} - z_1)^{\frac{1}{2}}$-Linie zu ersetzen. Mit der auf einem Transparentpapier aufgezeichneten $\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$-Linie wird jetzt v auf der Abszisse abgeschnitten und dann $h_{\ddot{u}}$ wieder als Ordinate des Schnittpunktes gefunden. Genau so verfährt man bei Zustand III und IV nach den Abb. 8 und 9. Mit $h_{\ddot{u}}$ erhält man aber z_2 nach den früher angegebenen Beziehungen.

Die Beschleunigungsgleichung (7a) gilt für das vereinfachte Verfahren unverändert.

Mit den in Abschnitt **5** und **6** sowohl für das strenge als auch für das vereinfachte Verfahren gefundenen Gleichungen für die einzelnen Bewegungsvorgänge kann nun an die zeichnerische Lösungsmethode herangegangen werden.

7. Vorbereitung des zeichnerischen Verfahrens. Entsprechend den Ausführungen *L. Mühlhofers*[1], die als bekannt vorausgesetzt werden, stellen auch hier die entwickelten Gleichungen für dz_1/dt, dz_2/dt und (7) bzw. (7a) den Tangentenverlauf der Kurven (z_1, t), (z_2, t) und (v, t) dar. Es gilt somit, z. B. unter Verwendung der Gleichungen (1a), (2a) und (7)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{dz_1}{dt} = \frac{\left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_1}{f}} = \frac{Z_1}{\frac{F_1}{f}}, \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{dz_2}{dt} = \frac{c - v - \left(\frac{z_2 - z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{F_2}{f}} = \frac{Z_2}{\frac{F_2}{f}}, \\ \operatorname{tg} v &= \frac{dv}{dt} = \frac{z_2 \mp \alpha v^2}{\frac{L}{g}} = \frac{Z}{\frac{L}{g}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

[2] [3]

Für die Durchführung des Verfahrens ist die Bestimmung zusammengehörender Werte, hier also (φ_i, ψ_i, v_i), $(\varphi_{i+\frac{1}{2}}, \psi_{i+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}})$, ... der Winkel (φ, ψ, v) für die Punkte (p_i', p_i'', p_i'''), $(p_{i+\frac{1}{2}}', p_{i+\frac{1}{2}}'', p_{i+\frac{1}{2}}''')$, ... erforderlich. Die Punkte (p_i', p_i'', p_i'''), $(p_{i+\frac{1}{2}}', p_{i+\frac{1}{2}}'', p_{i+\frac{1}{2}}''')$ ... sind Kurvenpunkte mit den Koordinaten (z_{1i}, t_i), (z_{2i}, t_i) und (v_i, t_i) bzw. $(z_{1i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})$, $(z_{2i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})$ und $(v_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})$. Da die Punkte (p_i', p_i'', p_i'''), $(p_{i+\frac{1}{2}}', p_{i+\frac{1}{2}}'', p_{i+\frac{1}{2}}''')$, ... jeweils bekannt sind bzw. bestimmt werden können, so sind damit auch die Werte von z_1, z_2 und v, also (z_{1i}, z_{2i}, v_i), $(z_{1i+\frac{1}{2}}, z_{2i+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}})$, ... bekannt. Die Winkel φ, ψ und v lassen sich leicht bestimmen, wenn die Größen Z_1, $\overline{Z}_1$, F_1/f, Z_2, $\overline{Z}_2$, F_2/f, $z_2 \mp \alpha v^2$ und L/g in den Gleichungen bekannt sind. Geht man zu endlichen Zeitdifferenzen Δt über, so können die zugehörigen Änderungen Δz_1, Δz_2 und Δv in diesem Intervall nach *L. Mühlhofer* in zwei Schritten bestimmt werden. Als Ergebnis erhält man die z_1-, z_2- und v-Linien der Diagramme XIII und XIV in den später folgenden Abb. 12 und 13.

---

[1] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 28–30.

[2] Der Winkel φ wurde hier abweichend von der Mühlhoferschen Darstellung gewählt, um Verwechslungen mit dem Beiwert α zu vermeiden.

[3] Zur Vereinfachung der Darstellung in der Zeichnung werden die Zähler der Gleichungen mit Z_1, Z_2 bzw. Z bezeichnet. Bei Entlastungsfällen kommen außerdem noch die Bezeichnungen $\overline{Z}_1$ und $\overline{Z}_2$ für die Zähler der Spiegelbewegungsgleichungen bei den Zuständen *II* bis *V* vor.

Da bei der allgemeinsten Form des Wasserschlosses außer L/g, das immer konstant ist, alle Größen der Bewegungsgleichungen veränderlich sein können, so erfordert die Ermittlung der Größen Z_1, $\bar{Z}_1$, F_1/f, Z_2, $\bar{Z}_2$, F_2/f und αv^2 acht weitere Teildiagramme I bis VIII, die anschließend behandelt werden. Zur Bestimmung der Druckhöhe p bei den vereinfachten Verfahren ist außerdem das Teildiagramm IX notwendig.

Teildiagramm I; F_1/f-Linie. Bei bekannter Wasserschloßform kann die Funktion $F_1(z)$ stets zeichnerisch dargestellt werden. Damit ist auch die F_1/f-Linie bestimmt, aus der man bei zweckmäßiger Anordnung links neben dem (z,t)-Diagramm (Abb. 12 und 13) die zu den jeweiligen Punkten der z_1-Linie gehörenden Werte von F_1/f abgreifen kann. Hat das Becken eine zylindrische Form, so ist die F_1/f-Linie eine zur z-Achse parallele Gerade im Abstande F_1/f.

Teildiagramm II; F_2/f-Linie. Es gilt das für die F_1/f-Linie Gesagte, jedoch auf das Zentralrohr bezogen, auch hier.

Teildiagramm III; $\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} = Z_1$-Linie. Es ist zweckmäßig, diese Parabel wegen des doppelten Vorzeichens von $\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ zu beiden Seiten der Achse zu zeichnen. Aus ihr kann bei bekannten z_1- und z_2-Ordinaten zusammengehörender Punkte der z_1- und z_2-Linien das zugehörige Z_1 ermittelt werden. Der positive Parabelast dient zur Bestimmung der Z_1-Werte für Spiegelsenkung, der negative für Spiegelanstieg.

Teildiagramm IV; $\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$- und $\frac{C_2-C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$-Linie. Bei Darstellung beider Kurven in einem Diagramm ist es aus Gründen der Deutlichkeit angebracht, jeweils nur einen Ast derselben zu zeichnen. Man findet aus diesen Linienzügen mit $h_{\ddot{u}}$ die Werte für $\frac{C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ bzw. $\frac{C_2-C_1}{f} h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$ mit Beachtung der früheren Vorzeichenfestsetzung.

Teildiagramm V; $h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$-Linie. Dieses Schaubild stellt $h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit von $h_{\ddot{u}}$ dar. Weil $h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ mit positivem und negativem Vorzeichen vorkommt, ist es zweckmäßig, beide Äste der Parabel zu verwenden.

Teildiagramm VI; $\left(\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)$- und $\left(\frac{C_2}{f} \delta + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)$-Linie. Diese Gerade liefert die Werte $\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$ bzw. $\frac{C_2}{f} \delta + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$ für die Gleichungen (10b) und (11b) bzw. (10c) und (11c).

Teildiagramm VII; αv^2-Linie. Die αv^2-Parabel dient zur raschen Ermittlung der Verlusthöhe im Stollen in den Gleichungen (7) und (7a). Bei Belastungsfällen treten nur positive Stollengeschwindigkeiten auf, so daß nur ein Parabelast für negative αv^2-Werte gezeichnet werden muß. Bei Entlastungsfällen hingegen können auch negative Stollengeschwindigkeiten vorkommen, also positive αv^2-Werte nötig werden. Dann sind beide Seiten der Parabel zu zeichnen. Es ist zweckmäßig, dieses Schaubild links neben dem (v,t)-Diagramm anzuordnen, weil dann v gleich herüberprojiziert werden kann. Bezüglich der Bestimmung des Beiwertes wird auf die Arbeit von *L. Mühlhofer*[1] verwiesen.

Teildiagramm VIII; $c = \frac{C}{f(H_0-z_2)}$-Linie für die Fälle konstanter Leistung. Die Geschwindigkeit c ist im allgemeinsten Falle eine Funktion von t und z zugleich. Hier ist c nach Gleichung (14a) eine Funktion von z_2 allein. Als Schaubild erhält man eine gleichseitige Hyperbel, die links neben dem (z,t)-Diagramm anzuordnen ist, damit z_2 sofort herüberprojiziert werden kann.

Teildiagramm IX; $\alpha_1(c-v)^2$- und $\alpha_1\left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^2$-Linie. Diese beiden Parabeln kommen nur beim vereinfachten Verfahren zur Anwendung und dienen zur Bestimmung der Druckhöhe p im Widerstand. Bei den Fällen konstanten sekundlichen Wasserverbrauchs ist es zweckmäßig, die $\alpha_1(c-v)^2$-Parabel links neben dem (v,t)-Diagramm so anzuordnen, daß die Achse in die c-Gerade fällt. Die $\alpha_1\left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^2$-Parabel wird hingegen, wie Abb. 13 zeigt, gleich in das Rechenbild XI übertragen, weil dort die Neigung der Polstrahlen auf einer Vertikalen in der Ent-

[1] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 5–7.

fernung eine Einheit vom Pol 0_1 sofort die $\dot{z}_1$-Werte liefert. Legt man die $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^2$-Parabel so, daß die Vertikale als Scheiteltangente und die Horizontale durch den Pol 0_1 als Achse dient, dann kann man für jedes $\dot{z}_1$ gleich das zugehörige $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^2 = p$ ablesen. Wird, wie bei Beispiel 2 (Abb. 13), die Vertikale in einem größeren Abstand als eine Einheit vom Pol 0_1 gewählt, so wirkt sich das natürlich auf den Maßstab von $\dot{z}_1$ entsprechend aus[1].

Wegen des doppelten Vorzeichens von α_1 sind diese Parabeln zu beiden Seiten ihrer Achsen zu zeichnen. Die Bestimmung des Beiwertes α_1 gestaltet sich für Be- und Entlastungsfälle verschieden und erfolgt mit Hilfe der Formeln von *F. Vogt*[2], *J. Schüller*[3] und *J. Frank*[4]. Auf die richtige Ermittlung von α_1 ist großer Wert zu legen, weil sonst der Verlauf des Zentralrohrspiegels wesentlich von dem in den Abb. 12 und 13 abweicht.

Teildiagramm X; p-Linie. Diese Linie gibt deutlich die verschiedenen Druckhöhen p im Widerstand während des Schwingungsvorganges wieder. Zur Konstruktion der (z,t)- und (v,t)-Diagramme wird dieses Schaubild jedoch nicht benötigt.

8. Festsetzung der Vorzeichen für die Achsenrichtungen und der Maßstäbe. Die Vorzeichenfestsetzung für die Achsenrichtungen in den Teildiagrammen geschieht nach den Angaben *L. Mühlhofers*[5]. Für die hier hinzugekommenen Diagramme ist die Vorzeichenfestsetzung aus den später folgenden Abb. 12 und 13 zu ersehen.

Die Wahl der Maßstäbe erfolgt ähnlich wie bei *L. Mühlhofer*[6], jedoch ist wegen der raschen Spiegelbewegungen zu Beginn des Schwingungsvorganges besonders auf die Wahl des Zeitmaßstabes zu achten. Die Winkel φ und ψ erhält man nach (19), wenn die Zähler Z_1, Z_2, $\bar{Z}_1$ und $\bar{Z}_2$ auf der Ordinate des Teildiagrammes XI so aufgetragen werden, daß 1 m/sek durch ED/T mm wiedergegeben wird. Der Winkel ν folgt aus (19), wobei auf der Abszisse des Teildiagrammes XII 1 sek^2 der Größe L/g durch TD/G mm dargestellt werden muß. Außer den gewählten Hauptmaßstäben für den gesamten Schwingungsverlauf ist es angebracht, für gewisse Zeitintervalle und Teildiagramme abweichende Maßstäbe zur Erhöhung der Ablesegenauigkeit zu verwenden (Abb. 12 und 13).

9. Durchführung des zeichnerischen Verfahrens. Bei der Bestimmung der Spiegelbewegungen und des Stollengeschwindigkeitsverlaufes geht man so vor, daß zunächst mit Hilfe der Ausführungs- und Betriebsgrößen der Widerstandsbeiwert α_1 ermittelt wird. Dann werden die Anfangslagen p', p'' und p''' der Spiegel und der Stollengeschwindigkeit festgelegt. Nach der Aufzeichnung der jeweils für den Be- bzw. Entlastungsfall notwendigen Teildiagramme und der Festlegung der Maßstäbe kann an die Konstruktion der z_1-, z_2- und v-Linien in Verbindung mit der Niederschrift herangegangen werden. Die Durchführung des ersten sowie der weiteren Schritte ist nach den Ausführungen von *L. Mühlhofer*[7] leicht verständlich.

Abweichend davon ist hier zu beachten, daß wegen der raschen Spiegelbewegungen, besonders zu Beginn des Schwingungsvorganges und da wieder hauptsächlich im Zentralrohr, zunächst mit kleineren Zeitintervallen gerechnet werden muß. Es ist zweckmäßig, mit $^1/_5$ bis $^1/_{10}$ des normalen, im weiteren Verlauf des Bewegungsvorganges benützten Zeitintervalles Δt zu beginnen. Auch in den gemeinsamen Extrempunkten soll wegen der kleinen Druckhöhe p die Schrittlänge verkleinert werden, weil sonst $\Delta z_1/\Delta t$ und $\Delta z_2/\Delta t$ ungenau werden. Durch die Wahl größerer Maßstäbe in diesen Bereichen kann wohl diesen Ungenauigkeiten noch eine Zeitlang begegnet werden, dann muß man aber zum vereinfachten Verfahren übergehen. Nach dem gemeinsamen Extrempunkt kann bei genügend großem p das strenge Verfahren wieder

---

[1] Wird außer der Beckendämpfung auch die Zentralrohrdämpfung berücksichtigt, dann kommt als weiteres Teildiagramm die $\alpha_2 \left(\frac{F_2}{f}\right)^2 \dot{z}_2^2$-Parabel hinzu. Bezüglich Verwendung und Anordnung derselben gilt das über die $\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^2$-Linie Gesagte.

[2] *F. Vogt*, Berechnung und Konstruktion des Wasserschlosses. Stuttgart 1923.

[3] *J. Frank* und *J. Schüller*, Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftanlagen. Berlin 1938.

[4] Siehe Fußnote 1 auf Seite 6.

[5] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 35.

[6] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 36.

[7] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 39—43.

Zahlentafel 1. *Niederschrift*

Zusammengehörende Punkte $p'\ p''\ p'''$	t	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(\frac{z_2-z_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{F_1/f} = \frac{Z_1}{F_1/f}$ . . . (1a) $\operatorname{tg}\psi = \frac{c-v-\left(\frac{z_2-z_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{F_2/f} = \frac{Z_2}{F_2/f}$ . . . (2a)						
		c	v	$c-v$	Z_1	Z_2	F_1/f	F_2/f
	sek	m/sek					Einh.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	$c=0$	+4,240	−4,240	0	−4,240		
$0+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$		+4,240	−4,240	−1,541	−2,699	11,76	0,49
1	$\frac{1}{3}$		+4,230	−4,230	−1,728	−2,502	Einh.	Einh.
$1+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		+4,222	−4,222	−2,090	−2,132		

Zahlentafel 2. *Niederschrift*

Zusammengehörende Punkte $p'\ p''\ p'''$	t	$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{C_2}{f}a + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{F_1/f} = \frac{\overline{Z}_1}{F_1/f}$ . . . (10b) $\operatorname{tg}\psi = \frac{c-v-\frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{C_2}{f}a + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{F_2/f} = \frac{\overline{Z}_2}{F_2/f}$ . . . (11b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{C_2}{f}a + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}}{F_1/f} = \frac{\overline{Z}_1}{F_1/f}$ . . . (10b) $c-v = \frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{C_2}{f}a + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$ . . . (16)								
		c	v	$c-v$	$\frac{C_1}{f}h_{\ddot{u}}^{\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{C_2}{f}a+\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)\cdot h_{\ddot{u}}^{\frac{1}{2}}$	$\overline{Z}_1$	$\overline{Z}_2$	F_1/f	F_2/f
	sek	m/sek							Einh.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$27+\frac{1}{2}$	25,5	$c=0$	+1,292	−1,292	−0,200	−1,079	−1,279	−0,013		
28	26		+1,244	−1,244	−0,167	−1,064	−1,231	−0,013	11,76	0,49
$28+\frac{1}{2}$	27		+1,135	−1,135	−0,113	−1,022	−1,135	0	Einh.	Einh.
29	28		+1,033	−1,033	−0,075	−0,958	−1,033	0		

angewendet werden. Während der Übergang vom strengen zum vereinfachten Verfahren immer leicht möglich ist, gestaltet sich der umgekehrte Vorgang nicht so einfach. Dieser soll deshalb für einen Belastungsfall nach dem ersten gemeinsamen Extrempunkt an Hand der Abb. 11 gezeigt werden.

Bis zu den Punkten $p'_{i+2+\frac{1}{2}}$ und $p''_{i+2+\frac{1}{2}}$ wird das vereinfachte Verfahren benützt, für das die Beziehungen (1b) und $z_2 = z_1 + p$ gelten. Von diesen Punkten ab soll das strenge Verfahren wieder angewendet werden. Da bei diesem die Spiegellage im Zentralrohr z_2 nach (2a) bestimmt wird, so muß zunächst der Zähler Z_2 des Bruches gefunden werden. Dies geschieht nach Abb. 11 so, daß man im Teildiagramm XI die parallelen Strahlen $0_2 - i+2$ zu $p''_{i+1} - p''_{i+2}$ und $0_2 - i+2+\frac{1}{2}$ zu $p''_{i+2} - p''_{i+2+\frac{1}{2}}$ zieht. Halbiert man den Abstand $i+2-i+2+\frac{1}{2}$, so erhält man den Punkt $\overline{i}+2+\frac{1}{2}$ und damit einen angenäherten Wert von Z_2 für den Zeitpunkt bei p''_{i+2}. Damit ist aber, da c und v bekannt sind, auch der Zähler Z_1 in (1a) bestimmt. Daraus läßt sich eine neue Spiegellage z_1 für das strenge Verfahren, dargestellt durch den Punkt $\overline{p}'_{i+2}$ rechnen[1]. Mit den Zählern

[1] Die Bestimmung der neuen Spiegellage z_1 beim Übergang vom vereinfachten zum strengen Verfahren beim Entlastungsfall nach dem ersten Extrempunkt geschieht wegen des Überfalles aus $\overline{Z}_1$.

zu Beispiel 1, Zustand I.

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{z_2 \mp \alpha v^2}{L/g} = \frac{Z}{L/g} \quad \ldots (7)$$

z_1	z_2	$p = z_2 - z_1$	$\mp \alpha v^2$	Z	L/g	Anmerkungen
m					sek²	
10	11	12	13	14	15	16
+1,640	+1,640	0	−1,640	0		Zustand I Beginn des Bewegungsvorganges Gln. (1a), (2a) u. (7).
+1,640	+0,218	−1,422	−1,640	−1,422	42,84	
+1,597	−0,190	−1,787	−1,636	−1,826	sek²	
+1,572	−1,044	−2,616	−1,630	−2,674		

zu Beispiel 1, Zustand III.

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{z_2 \mp \alpha v^2}{L/g} = \frac{Z}{L/g} \quad \ldots (7)$$

z_1	z_2	$p = z_2 - z_1$	$h_{ü}$	$h_{ü}^{\frac{1}{3}}$	a	$\frac{C_2}{f} a + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$	$\mp \alpha v^2$	Z	L/g	Anmerkungen
m									sek²	
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
−4,003	−4,327	−0,324	0,324	−0,569	0,333	1,895	−0,153	−4,480		Zustand III Übergang vom strengen zum vereinfachten Verfahren Gln. (10b), (11b) u. (7) str. Verf. Gln. (10b), (16) u. (7) vereinf. Verf. $h_{ü} = z_2 - z_1$, $a = z_1 - h_{ü}$.
−4,053	−4,340	−0,287	0,287	−0,536	0,383	1,986	−0,141	−0,481	42,84	
−4,157	−4,378	−0,221	0,221	−0,470	0,487	2,174	−0,118	−4,496	sek²	
−4,243	−4,412	−0,169	0,169	−0,411	0,573	2,330	−0,098	−4,510		

Z_1 und Z_2 kann nun von den Punkten p''_{i+2} und $\overline{p}'_{i+2}$ ab das strenge Verfahren wieder angewendet werden. Der Übergang vom vereinfachten zum strengen Verfahren muß immer dann erfolgen, so lange der von p'_{i+2} auf $\overline{p}'_{i+2}$ auftretende Sprung praktisch noch bedeutungslos ist.

Die genaue Festlegung der Extremwerte der z- und v-Linien erfolgt nach den Angaben *L. Mühlhofers*[1] hier ebenso.

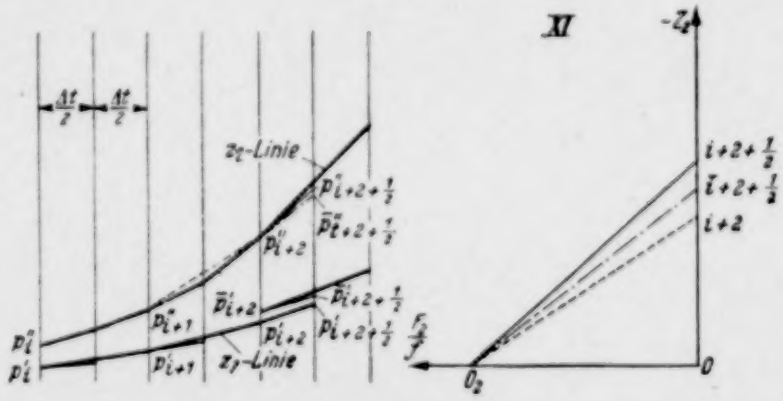


Abb. 11. Übergang vom angenäherten zum genauen Verfahren nach dem ersten gemeinsamen Extrempunkt bei einem Belastungsfall.

10. Beispiele für die Spiegelbewegungen im Differentialwasserschloß. Aus einer großen Anzahl durchgezeichneter Beispiele wurden zwei ausgewählt, welche die Anwendung des Verfahrens

[1] *L. Mühlhofer*, a. a. O., S. 50.

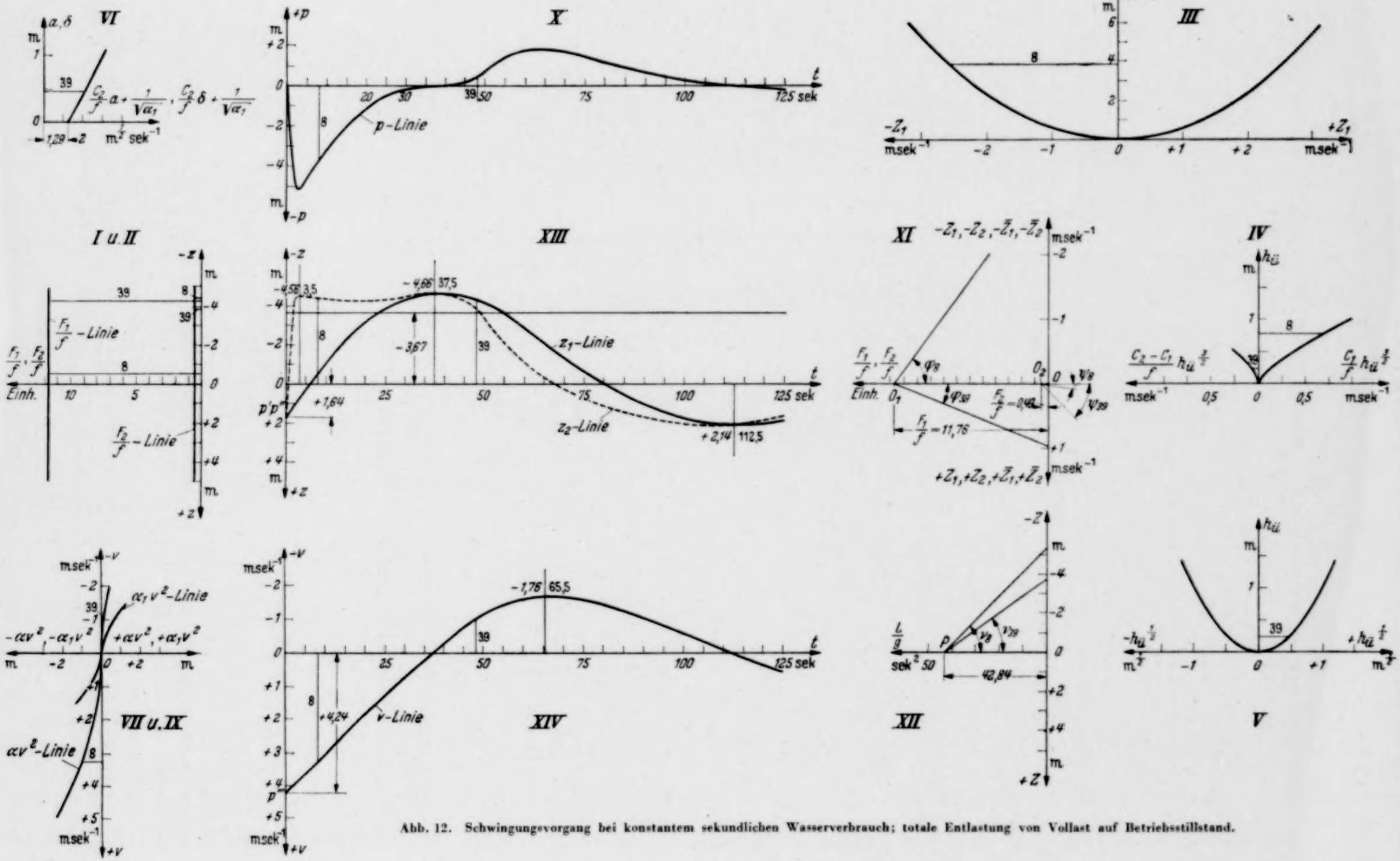
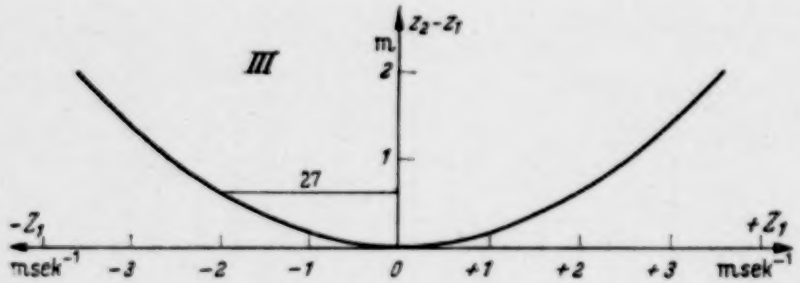
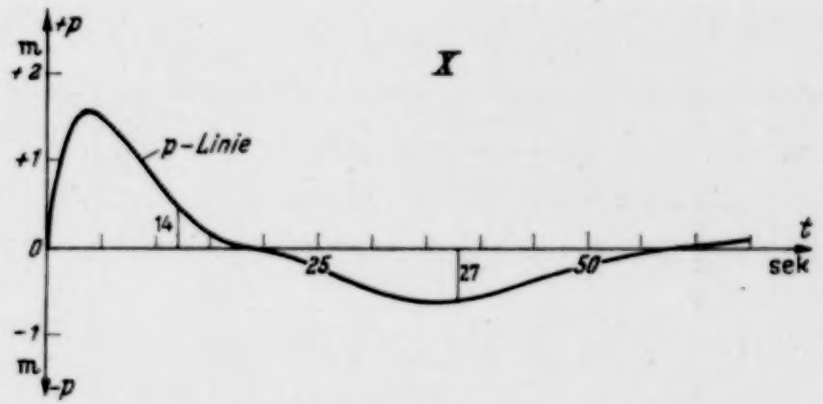
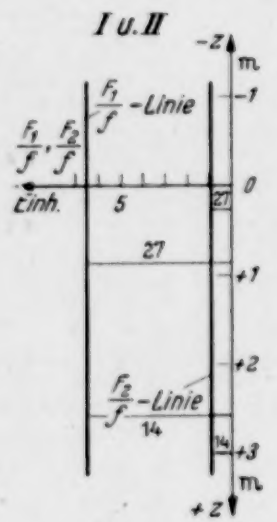
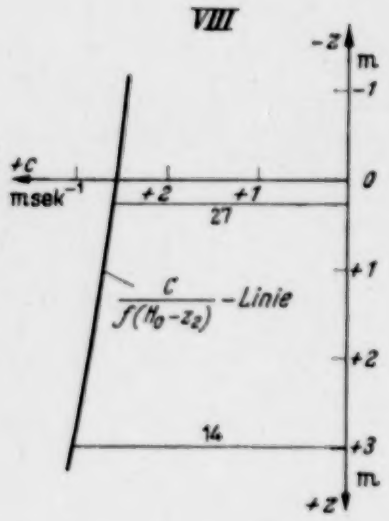


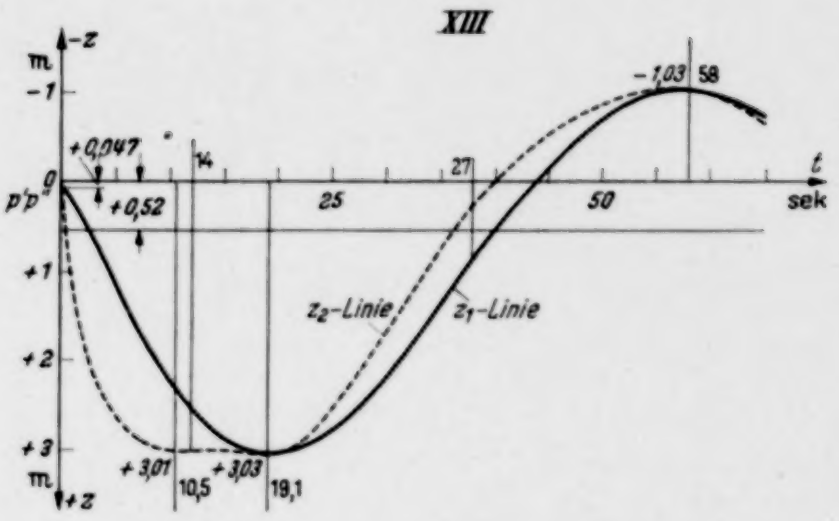
Abb. 12. Schwingungsvorgang bei konstantem sekundlichen Wasserverbrauch; totale Entlastung von Vollast auf Betriebsstillstand.

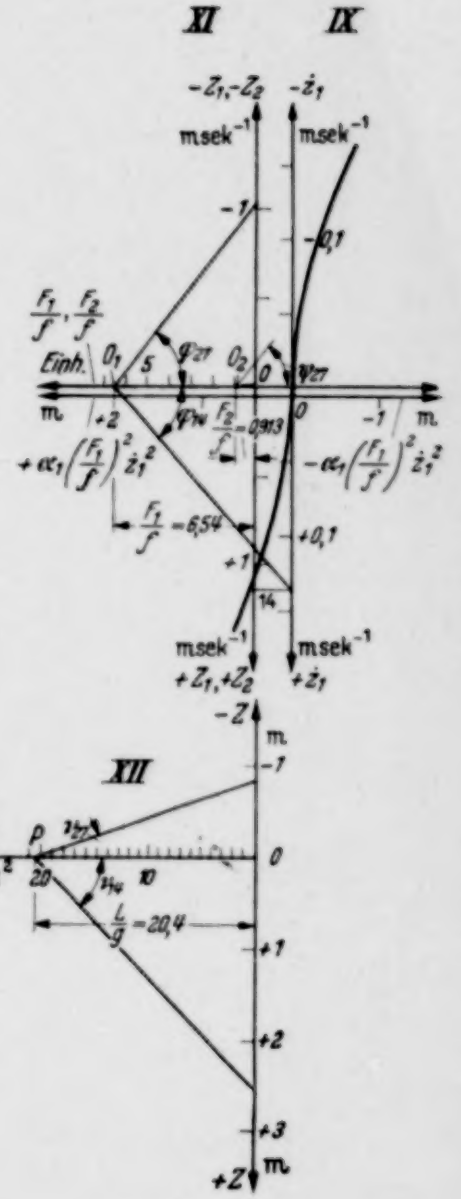


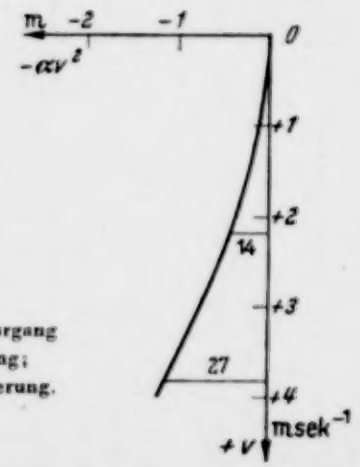


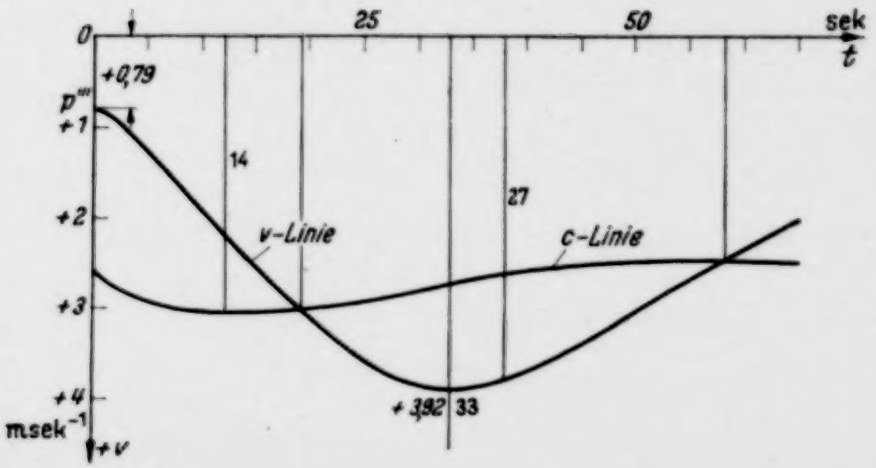












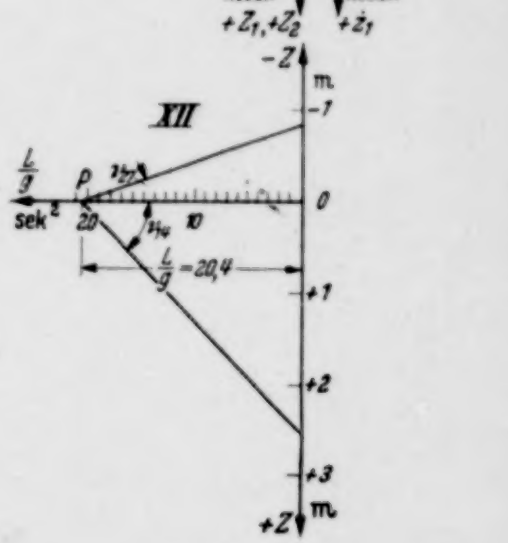


Abb. 13. Schwingungsvorgang bei konstanter Leistung; teilweise Belastungssteigerung.

Zahlentafel 3. *Niederschrift*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{F_1/f} = \frac{Z_1}{F_1/f} \qquad \ldots (1a)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{C}{f(H_0-z_2)} - v - \left(\frac{z_2-z_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{F_2/f} = \frac{Z_2}{F_2/f} \qquad \ldots (2a)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{C}{f(H_0-z_2)} - v}{F_1/f} = \frac{Z_1}{F_1/f} \qquad \ldots (1b)$$

$$p = \pm\,\alpha_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 \dot{z}_1^{\,2} \qquad \ldots (3a)$$

Zusammengehörende Punkte $P'\,P''\,P'''$	t	$c-\frac{C}{f(H_0-z_2)}$	v	$c-v$	$\frac{C}{f(H_0-z_1)}$	$v-\frac{C}{f(H_0-z_1)}$	Z_1	Z_2	$\dot{z}_1$	F_1/f	F_2/f
	sek	m/sek								Einh.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	+2,570	+0,790	+1,780	—	—	0	+1,780	—		
$0+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	+2,612	+0,790	+1,822	—	—	+0,739	+1,083	—		
1	$\frac{1}{3}$	+2,623	+0,796	+1,827	—	—	+0,774	+1,053	—		
$1+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+2,647	+0,800	+1,847	—	—	+0,943	+0,904	—		
$36+\frac{1}{2}$	57	+2,435	+2,512	−0,077	+2,437	+0,075	−0,077	0	−0,0118		
37	58	+2,435	+2,438	−0,003	+2,435	+0,003	−0,003	0	0		
$37+\frac{1}{2}$	59	+2,435	+2,364	+0,071	+2,435	−0,071	+0,071	0	+0,011	6,54 Einheiten	0,913 Einheiten
$38+\frac{1}{2}$	61	+2,447	+2,228	+0,219	+2,443	−0,215	+0,219	0	+0,034		
39	62	+2,456	+2,164	+0,292	+2,447	−0,283	+0,292	0	+0,045		
39	62	+2,456	+2,164	+0,292	—	—	+0,233	+0,059	—		
$39+\frac{1}{2}$	63	+2,462	+2,104	+0,358	—	—	+0,295	+0,063	—		

Zahlen-

Belastungsfall	Ausführungsgrößen					Betriebsgrößen			
	L m f m²	F_1 m² F_2 m²	H_0 m h_z m	α sek² m⁻¹ α_1 sek² m⁻¹	$C_1^{\frac{3}{2}}$ m³ sek⁻¹ $C_2^{\frac{3}{2}}$ m³ sek⁻¹	z_a m z_e m	$\bar{Q}_a$ m³ sek⁻¹ Q_e m³ sek⁻¹	$v_a = \frac{Q_a}{f}$ m sek⁻¹ $v_e = \frac{Q_e}{f}$ m sek⁻¹	C m⁴ sek⁻¹
Totale Entlastung b. konst. sekundl. Wasserverbrauch [2]	420 28,27	332,55 13,85	— −3,67	0,0914 0,599	30,62 51,2	1,64 0	120 0	4,27 0	—
Teilw. Belastungssteigerung b. konst. Leistung [3]	200 3,8	24,83 3,47	20 —	0,0752 0,599	— —	0,047 0,52	3 10	0,79 2,63	194,8

[1] In der ersten Zeile dieser Spalten sind die zeichnerischen Ergebnisse, in der zweiten die Vergleichswerte durch eigene Rechnung und in der dritten die Vergleichswerte anderer Autoren wiedergegeben.

[2] Die Angaben für diese Anlage wurden dem angeführten Buche von *J. Frank* und *J. Schüller*, S. 189 entnommen. Dort findet man auch den in der Zahlentafel angegebenen Vergleichswert. Denselben Wert erhält man aus der genannten Arbeit von *F. Vogt*, S. 93, Gleichung (19).

[3] Für dieses Beispiel wurden die Angaben von *J. Frank*, Dtsch. Wasserw., S. 105, benützt, der die angegebenen Vergleichswerte durch numerische Integration gefunden hat.

zu Beispiel 2.

$$\operatorname{tg} v = \frac{z_2 \mp \alpha v^2}{L/g} = \frac{Z}{L/g} \quad \ldots (7)$$

z_1	z_2	$p = z_2 - z_1$ bzw. $p = \pm a_1 \left(\frac{F_1}{f}\right)^2 z_1^2$	$\mp \alpha v^2$	Z	L/g	Anmerkungen
m					sek^2	
13	14	15	16	17	18	19
+0,047	+0,047	0	−0,047	0		
+0,047	+0,374	+0,327	−0,047	+0,327		Beginn des Bewegungsvorganges
+0,086	+0,445	+0,359	−0,048	+0,397		Gl. (1a), (2a) und (7).
+0,106	+0,638	+0,532	−0,048	+0,590		
−1,024	−1,028	−0,004	−0,475	−1,503		
−1,030	−1,030	0	−0,448	−1,478		2. Extrempunkt
−1,030	−1,027	+0,003	−0,421	−1,448		Gl. (1b), (3a) und (7).
−0,984	−0,955	+0,029	−0,374	−1,329	20,4 sek^2	Übergang vom vereinfachten zum strengen Verfahren nach dem 2. Extrempunkt
−0,939	−0,888	+0,051	−0,352	−1,240		
−0,9206	−0,888	+0,0326	−0,352	−1,240		Gln. (1b), (3a) u. (7) vereinf. Verf.
−0,878	−0,826	+0,052	−0,334	−1,160		Gln. (1a), (2a) u. (7) str. Verf.

tafel 4.

Angenommene Maßstäbe		Abgeleitete Maßstäbe	Ergebnisse für die extremen Spiegellagen[1]						Ergebnisse für die Stollengeschwindigkeit				
1 Einheit E mm / 1 m D mm	1 sek T mm / 1 m sek^{-1} G mm	1 m sek^{-1} $\frac{ED}{T}$ mm / 1 sek^2 $\frac{TD}{G}$ mm	$z^{\text{m}}_{1\,\max} = z^{\text{m}}_{2\,\max}$	t^{sek}_1	$\bar{z}^{\text{m}}_{1\,\max} = \bar{z}^{\text{m}}_{2\,\max}$	t^{sek}_2	$z'^{\text{m}}_{2\,\max}$	t'^{sek}_2	$v^{\text{m sek}^{-1}}_1$ / t^{sek}_{1v}	aus Zeichng.	durch eigene Rechng.	aus Zeichng.	durch eigene Rechng.
20	6	100	−4,66	37,5	+2,14	112,5	−4,56	3,5	−1,76	für t = 20 sek		für t = 75 sek	
30	50	3,6	−4,94	35,3	+2	112,4	—	—	65,5	+1,87	+1,89	−1,55	−1,65
			−4,62	—	—	—	—	—					
12	6	100	+3,03	19,1	−1,03	58	+3,01	10,5	+3,92	für t = 10 sek		für t = 38 sek	
50	50	6	+2,91	17,7	−0,91	60	+2,91	10,95	33	+1,86	+2,07	+3,75	+3,68
			+3,03	19	−1,09	57,5	+3,03	10					

zeigen und seine Brauchbarkeit nachweisen sollen. Im ersten Beispiel, das Abb. 12 wiedergibt, wird ein Fall totaler Entlastung von Vollast ($Q_a = Q_0$) auf Betriebsstillstand bei konstantem sekundlichen Wasserverbrauch behandelt. Das zweite Beispiel in Abb. 13 zeigt einen Schwingungsvorgang konstanter Leistung bei einer Belastungssteigerung von einer kleineren Anfangsleistung $N_a(Q_a)$ auf eine größere Endleistung $N_e(Q_e)$.

In den Abb. 12 und 13 wurden die Konstruktionslinien für den Beginn zweier Intervalle in allen Teildiagrammen eingetragen. Die gleichzeitig mit den Zeichnungen entwickelten Niederschriften sind auszugsweise in den Zahlentafeln 1 bis 3 wiedergegeben. Dabei zeigen die Zahlen-

tafeln 1 und 2 einige Intervalle während der Zustände I und III für das erste Beispiel, die Zahlentafel 3 den Beginn und die Umgebung der zweiten gemeinsamen Spiegellagen beim zweiten Beispiel. Sie dürften ohne weitere Erklärung verständlich sein.

Die Ausführungs- und Betriebsgrößen beider Anlagen können ebenso wie die angenommenen und abgeleiteten Maßstäbe der Zahlentafel 4 entnommen werden. Dort sind auch die Extremwerte der ersten gemeinsamen Spiegellagen $z_{1\max} = z_{2\max}$ zur Zeit t_1, der zweiten gemeinsamen Spiegellagen $\overline{z}_{1\max} = \overline{z}_{2\max}$ zur Zeit t_2, sowie die erste extreme Spiegellage im Zentralrohr $z'_{2\max}$ zur Zeit t'_2 zusammengestellt. Desgleichen findet man dort den Extremwert der Stollengeschwindigkeit v_1 zur Zeit t_{1v} und zwei Werte für die Stollengeschwindigkeit zu beliebigen Zeitpunkten, die, ebenso wie alle anderen Ergebnisse mit Vergleichswerten belegt sind.

11. Zusammenfassung. Die Ergebnisse der Zahlentafel 4 zeigen für zwei in der Praxis vorkommende Fälle, daß nach dem behandelten zeichnerischen Verfahren die Spiegellagen und die Stollengeschwindigkeit für jeden Zeitpunkt des Schwingungsvorganges hinreichend genau bestimmt werden können. Dabei wurde immer eine plötzliche Belastungsänderung der Turbinen angenommen. Für den praktischen Betrieb ist jedoch auch eine Erfassung der Fälle allmählicher Belastungssteigerung bzw. Entlastung erforderlich. Diese Fälle können mit diesem Verfahren nach einigen Überlegungen ebenfalls leicht bewältigt werden.

Auch bei Annahme eines anderen Widerstandsgesetzes als des quadratischen für die Stollenreibung und die Dämpfung im Durchtrittsquerschnitt behält das Verfahren seine Gültigkeit, was als weiterer Vorteil zu werten ist.

Die Frage der Stabilität wird durch genügend weites zeichnerisches Verfolgen des Schwingungsvorganges beantwortet.

(Eingegangen am 21. Dezember 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hugo Weirich*, (14a) Stuttgart W, Silcherstraße 3/II.

Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben.

Von **W. Flügge** und **K. Marguerre.**

1. Problemstellung. Wenn sich in einem zylindrischen Stab die zu den *St-Venant*schen Torsionsspannungen gehörige Verwölbung der Querschnitte infolge einer Endeinspannung oder einer Veränderlichkeit des Torsionsmomentes M_T längs der Stabachse x nicht frei ausbilden kann, so entsteht eine Störung des Torsionsspannungszustandes. Sie ist gekennzeichnet durch das Auftreten einer „Wölbkraftgruppe", d. h. eines Systems von Längsspannungen ohne Resultierende und ohne resultierendes Moment, die, im Stabquerschnitt angreifend, Verwölbungen hervorrufen oder schon vorhandene Verwölbungen verändern (z. B. an einer Einspannstelle zu Null machen). Ihre Untersuchung ist die Aufgabe der Wölbkraft-Torsionstheorie, mit der wir uns hier befassen wollen.

In einem zylindrischen Stab, dessen Querschnitt in seiner Ebene undeformierbar ist, gibt es, wie unsere Rechnung zeigen wird, bestimmte Wölbkraftgruppen, die sich beim Hineinwandern in den Stab nur der Amplitude, nicht aber der Form nach verändern. Da sie sich als die Eigenfunktionen einer Differentialgleichung erweisen werden, nennen wir sie Eigenkraftgruppen. Jede solche Eigenkraftgruppe hat eine ganz bestimmte Abkling-„Geschwindigkeit", und man erhält den zu einer beliebigen Störung gehörigen Spannungszustand im ganzen Stab, wenn man die Störung nach den Eigenkraftgruppen entwickelt, d. h. die Eigenkraftgruppen an der Störstelle mit solchen Amplituden zusammenfügt, daß die vorgegebene Störung entsteht. (Grundproblem: an den Endflächen $x=0$, $x=l$ eines Stabes greifen beliebig vorgeschriebene Normalspannungen an.) Durch Überlagerung eines solchen Störzustandes über die aus der Theorie der ungestörten Torsion (oder auch Biegung) bestimmten Spannungen und Formänderungen erhält man dann im Einzelfall die Lösung eines unmittelbar gegebenen Problems.

Wir beschäftigen uns hauptsächlich in dieser Arbeit mit dem so definierten Eigenwertproblem. Wieweit das lösbar ist, hängt ab von der Gestalt des Querschnitts: Für Vollquerschnitte (wo das Störungsproblem aber glücklicherweise so gut wie bedeutungslos ist) ist eine Lösung nicht bekannt. Der Rechnung zugänglich sind bisher nur die dünnwandigen Profile (wo die Querschnittspunkte nicht durch zwei gleichberechtigte Koordinaten festgelegt werden, sondern im wesentlichen nur durch eine), und bei diesen besteht wieder ein Unterschied zwischen den geschlossenen und den offenen. Bei den geschlossenen ist, wenn sie nicht sehr kräftige Gurte haben, die numerische Auswertung der allgemeinen Theorie recht mühsam, bei den offenen so einfach, daß man nach Einführung gewisser, die Torsionsverwölbung enthaltender Querschnittsfunktionen zu übersichtlichen geschlossenen Formeln gelangt. Diese Formeln sind seit langem bekannt[1]. Wir begnügen uns hier damit, zwischen diesen Formeln und unseren allgemeinen Ansätzen den Zusammenhang herzustellen; denn das Ziel unserer Arbeit ist es, die Frage der Wölbkrafttorsion der Rohre zu klären und die Wölbkrafttorsion der offenen Profile nach derselben Methode so darzustellen, daß erstens der Zusammenhang zwischen beiden Problemen deutlich wird, und zweitens die erwähnten Formeln für die offenen Profile eine neue Begründung erfahren[2].

2. Die Grundgleichungen. Wir untersuchen das Endstörungsproblem unseres prismatischen dünnwandigen Stabes als ein Stabproblem, d. h. unter der Voraussetzung, daß ungeachtet der sonstigen Verformungen die Gestalt des Querschnitts erhalten bleibe. Wie weit diese Voraussetzung zutrifft, untersuchen wir hier nicht. Bei Rohren insbesondere kann, wenn die Wandung sehr dünn ist, eine größere Anzahl starrer Spante nötig sein.

---

[1] Vgl. z. B. *R. Kappus*, Luftfahrtforschung 1937, S. 444.

[2] Die vorliegende Untersuchung ist eine in gemeinsamer Arbeit entstandene Erweiterung eines früheren Aufsatzes von *W. Flügge*, Torsion mit behinderter Verwölbung, der im wesentlichen die Lösung des Wölbkraftproblems für das Rohr enthielt. Es war zur Veröffentlichung im *Prandtl*-Festheft der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung (1945) vorgesehen und ist, soweit uns bekannt, nicht mehr in die Öffentlichkeit gekommen. — Für gelegentliche Diskussionen und kritische Bemerkungen möchten die Verfasser Herrn *R. Kappus* ihren Dank aussprechen.

Die Linie, die die Dicke t der Profilwandung überall halbiert, nennen wir die Skelettlinie des Profils. Wenn wir die Wölbspannungen σ und die Schubspannungen τ in Dickenrichtung zu Resultierenden zusammenfassen, so entstehen Wölbkräfte (Abb. 1).

$$S = \int_{-t/2}^{+t/2} \sigma \, d\zeta$$

und Schubflüsse

$$T = \int_{-t/2}^{+t/2} \tau \, d\zeta \,,$$

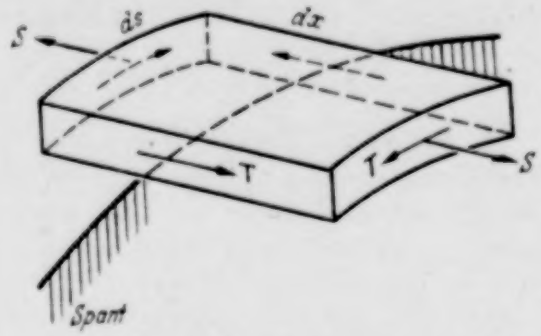


Abb. 1. Element $t\,dx\,ds$ der Profilwandung.

die Wölbkräfte in Richtung der Stabachse, die Schubflüsse in Richtung der Skelettlinie wirkend. Von den Wölbspannungen σ werden wir ohne Schaden annehmen können, daß sie über die Dicke gleichmäßig verteilt sind, so daß wir einfach $S = \sigma t$ schreiben können; wir können sogar abschnittsweise gleichförmig verteilte (Längs-) Stringer zulassen, deren Querschnitte f wir uns auf den Zwischenstrecken Δs „umgelegt" denken, so daß wir für S etwas allgemeiner schreiben können[1]:

$$S = \sigma t_x \quad \text{mit} \quad t_x = t + f/\Delta s \,.$$

Die Schubspannungen τ dagegen setzen sich aus zwei Anteilen zusammen, die sich beide als wesentlich erweisen werden, einem Mittelwert $\bar{\tau} = T/t$ und einer Abweichung $\tilde{\tau}$ von diesem Mittelwert, die von der Normalkoordinate ζ abhängt und bei den offenen Profilen eine wichtige Rolle spielen wird.

Von den drei Komponenten der Verschiebung interessieren uns nur zwei: die Achsialverschiebung u und die Verschiebung v in Richtung der Tangente der Skelettlinie. Für die vier unbekannten Funktionen S, T, u und v von x und s haben wir vier Aussagen: die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte in der x-Richtung am Wandelement $dx\,ds$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \,, \tag{1}$$

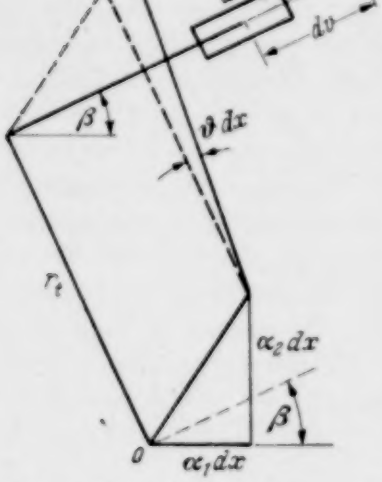


Abb. 2. Entstehung der tangentialen Relativverschiebung $dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx$ aus α_1, α_2 und ϑ.

die beiden Elastizitätsgleichungen

$$S = E t_x \frac{\partial u}{\partial x} \,, \qquad T = G t \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \tag{2a, b}$$

und die kinematische Aussage der Unveränderlichkeit der Querschnittsgestalt (Abb. 2)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_1 \cos\beta + \alpha_2 \sin\beta + \vartheta\, r_t \,, \tag{3}$$

welche die tangentiale Relativverschiebung dv zweier Skelettpunkte vom Abstand dx ausdrückt durch die beiden Verschiebungs- und die Drehungskomponente der Relativbewegung zweier starrer Querschnitte; α_1, α_2, ϑ sind Funktionen nur von x, zu deren Bestimmung später die drei Gleichgewichtsbedingungen für die Bewegung eines Stabelementes dx in der Querschnittsebene dienen werden.

Wir eliminieren S, T und v, indem wir (2) und (3) in (1) einsetzen. Man erhält dann für u die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$G \frac{\partial}{\partial s} \left(t \frac{\partial u}{\partial s} \right) + E t_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -G \frac{\partial}{\partial s}\, t \,(\alpha_1 \cos\beta + \alpha_2 \sin\beta + \vartheta\, r_t) \,. \tag{4}$$

Da ihre Koeffizienten von x unabhängig sind, kann man sie durch einen Exponentialansatz mit reellem oder imaginärem Argument in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführen. Wir wählen

$$\left.\begin{aligned} u(s,x) &= u_n(s)\, e^{-\mu_n x} \,, \\ \alpha_1(x) &= \alpha_{1n}\, e^{-\mu_n x} \,, \quad \alpha_2(x) = \alpha_{2n}\, e^{-\mu_n x} \,, \\ \vartheta(x) &= \vartheta_n\, e^{-\mu_n x} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] Vgl. z. B. *H. Köller*, Jahrb. d. dtsch. Luftfahrtforschung 1940, S. I 852.

und erhalten

$$\frac{1}{t}\frac{d}{ds}\left(t\frac{du_n}{ds}\right)+\lambda_n^2 u_n=-\frac{1}{t}\frac{d}{ds}t(\alpha_{1n}\cos\beta+\alpha_{2n}\sin\beta+\vartheta_n r_t)\,. \tag{6}$$

mit

$$\lambda_n^2=\frac{Et_x}{Gt}\mu_n^2\,.$$

Die Wahl (5) ist dabei bestimmt durch das Ziel unserer Untersuchung: festzustellen, ob es Spannungszustände gibt, die, hervorgerufen durch eine Belastung des Stabendes $x=0$, mit wachsendem x abklingen.

Den technisch kaum interessierenden Fall einer mit s beliebig veränderlichen Wandstärke wollen wir hier allgemein nicht weiter verfolgen, sondern t und t_x hinfort als stückweise konstant ansehen. Dann läßt sich für (6) die Lösung in geschlossener Form angeben:

$$u_n=A_n\cos\lambda_n s+B_n\sin\lambda_n s-\int_0^s(\alpha_{1n}\cos\beta'+\alpha_{2n}\sin\beta'+\vartheta_n r_t')\cos\lambda_n(s'-s)\,ds'\,, \tag{7a}$$

wobei wir β', r_t' statt β, r_t, geschrieben haben, wenn diese Größen von der mit s' bezeichneten Integrationsvariabeln abhängen. Mit

$$T(s,x)=T_n(s)\,e^{-\mu_n x}\,, \tag{5'}$$

entsprechend (5), liefert das Elastizitätsgesetz (2b)

$$T_n=-Gt\lambda_n\left[A_n\sin\lambda_n s-B_n\cos\lambda_n s+\int_0^s(\alpha_{1n}\cos\beta'+\alpha_{2n}\sin\beta'+\vartheta_n r_t')\sin\lambda_n(s'-s)\,ds'\right]. \tag{7b}$$

Die durch (7a) und (7b) dargestellte Lösung der Gleichung (6) enthält außer dem Parameter λ_n fünf Konstanten

$$A_n,\ B_n,\ \alpha_{1n},\ \alpha_{2n},\ \vartheta_n\,. \tag{8}$$

Ist die Wandstärke nicht längs der ganzen Skelettlinie, sondern nur abschnittsweise konstant, so gilt für jeden solchen Abschnitt eine Lösung der Form (7) mit anderen Werten A_n, B_n, aber mit denselben α_{1n}, α_{2n}, ϑ_n. Gibt es m verschiedene Abschnitte mit konstantem t, so hat man also insgesamt $2m+3$ Konstante.

Zu ihrer Bestimmung haben wir zwei Arten von Bedingungen: drei Gleichgewichtsaussagen für die am Stabelement parallel zur Querschnittsebene wirkenden Kräfte und Momente und je zwei Rand- oder Übergangsbedingungen für jeden der Skelettabschnitte mit konstanter Wandstärke.

Die drei Gleichgewichtsbedingungen für das Stabelement sagen aus, daß die beiden Querkräfte Q_y, Q_z und das Torsionsmoment M_T konstant sind[1]:

$$\frac{dQ_y}{dx}=0\,,\qquad \frac{dQ_z}{dx}=0\,,\qquad \frac{dM_T}{dx}=0\,.$$

Da das Störproblem, das wir untersuchen wollen, dadurch gekennzeichnet ist, daß in den Stabendquerschnitten nur Gleichgewichtsgruppen angreifen, so folgt aus den drei Gleichgewichtsbedingungen durch Integration

$$Q_y=0\,,\quad Q_z=0\,, \tag{9}$$

$$M_T=0\,. \tag{10}$$

Die zu (9), (10) hinzutretenden Rand- und Übergangsbedingungen für die Skelettabschnitte sind zum Teil mechanischer, zum Teil geometrischer Natur. Ist das Profil ein einfacher offener Linienzug, so gilt für die beiden Werte des Schubflusses T an den Skelettenden „0" und „1"

$$T(0)=0\,,\quad T(s_1)=0\,. \tag{11}$$

Ist das Profil ein einfaches Rohr vom Umfang s_1, so bestehen die beiden Bedingungen für den doppelten Zusammenhang:

$$u(s_1)=u(0)\,,\quad T(s_1)=T(0)\,. \tag{12a, b}$$

---

[1] Entsprechende Aussagen für die drei Normalspannungsresultanten (die Längskraft und die beiden Biegemomente) brauchen wir am Stabelement nicht zu formulieren, weil das x-Gleichgewicht für das Stabelement durch (1) gesichert ist. In der Tat folgt

$$\frac{dN}{dx}=\int\frac{\partial S}{\partial x}\,ds=0\,,\qquad \frac{dM_y}{dx}=\int\frac{\partial S}{\partial x}z\,ds=0\,,\qquad \frac{dM_z}{dx}=-\int\frac{\partial S}{\partial x}y\,ds=0$$

aus (1) zusammen mit (9) und den Rand- oder Übergangsbedingungen für T; bei N unmittelbar, bei M_y, M_z durch Teilintegration. Und da die Längskraft und die Momente an den Stabenden Null sind, verschwinden sie überall.

Man hat also für die fünf Unbekannten in beiden Fällen fünf Gleichungen. Ist die Wandstärke t nur abschnittweise konstant, so besteht an jeder Abschnittsgrenze eine Stetigkeitsforderung für die Verwölbung u und (nach Abb. 3a) für den Schubfluß T. Sitzt an einer Stoßstelle eine konzentrierte Längsversteifung, so verläuft u ebenfalls stetig, während T so springt, wie es die Gleichgewichtsbedingung für das Element dx des Stringers nach Abb. 3b verlangt:

$$T_n^{(k-1)} - T_n^{(k)} = F_{k-1,k} \frac{d\,\sigma_n^{(k-1,k)}}{dx}$$

oder

$$T_n^{(k-1)} - T_n^{(k)} = E\,\mu_n^2 F_{k-1,k}\,u_n^{(k-1,k)}. \tag{12'}$$

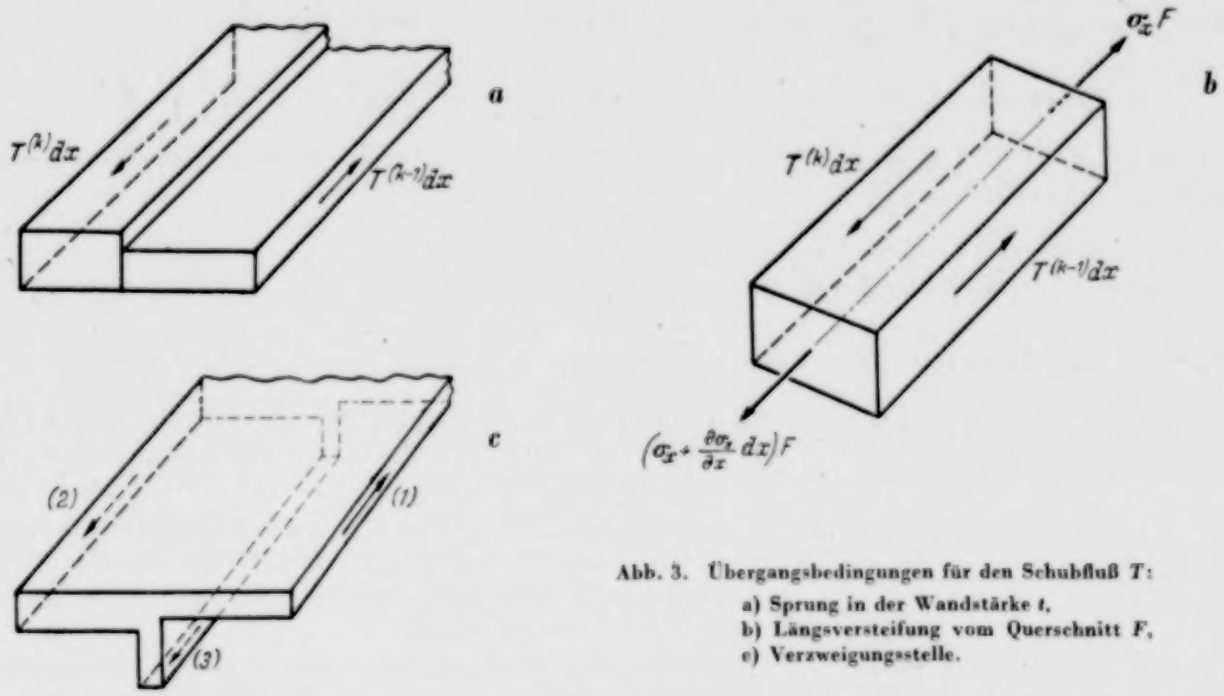


Abb. 3. Übergangsbedingungen für den Schubfluß T:
a) Sprung in der Wandstärke t,
b) Längsversteifung vom Querschnitt F,
c) Verzweigungsstelle.

Beim offenen Profil mit m Abschnitten gibt es $m-1$ Abschnittsgrenzen und daher $2(m-1)$ Übergangsbedingungen, zu denen die beiden Bedingungen (11) hinzutreten. Beim Rohr gibt es m Abschnittsgrenzen, also $2m$ Übergangsbedingungen, die dann aber die Aussagen (12) über den doppelten Zusammenhang schon mit enthalten.

Wenn schließlich die Skelettlinie Verzweigungsstellen aufweist, so kommen für das in einem solchen Punkt abzweigende Skelettstück ebenfalls zwei Bedingungen hinzu: entweder die zwei Stetigkeitsforderungen für u an seinen beiden Enden oder, wenn der Zweig frei endet, (z. B. Flanschhälfte eines I-Profils), als zweite die Bedingung $T=0$ für dies Ende. Das aus Abb. 3c abzulesende Verzweigungsgesetz für den Schubfluß

$$T_n^{(1)} = T_n^{(2)} + T_n^{(3)} \tag{13'}$$

zählt nicht als neue Bedingung, da es nur die Stetigkeitsforderung für T ersetzt, die man auch ohne den Abzweig an der Grenze zweier Abschnitte hätte formulieren müssen.

Wir haben also immer zur Bestimmung der Unbekannten (8) soviel homogene Gleichungen, wie Unbekannte vorhanden sind; diese können nur dann eine von der trivialen verschiedene Lösung besitzen, wenn ihre Determinante verschwindet. Das liefert eine transzendente Gleichung für die Größe λ_n mit unendlich vielen Lösungen λ_p, durch die wegen $\mu_n^2 E t_x/Gt = \lambda_n^2$ auch die Abklingfaktoren μ_n bestimmt sind. Zu jeder dieser Lösungen gehört eine besondere Wölbkraftgruppe $S_n(s)$ samt dem zugehörigen Schubfluß T_n, und da man zeigen kann, daß dieses System von Eigenfunktionen vollständig ist, so läßt sich jede beliebige Gleichgewichtsgruppe von Wölbspannungen $S(s)$ danach entwickeln. Auf diese Weise ist es grundsätzlich möglich, die Spannungen in einem Stab zu finden, an dessen Endquerschnitt eine beliebige Gleichgewichtsgruppe von Normalspannungen angreift oder dessen Endquerschnitt eine beliebige Verwölbung u aufgezwungen wird. Die Schubspannungsverteilung im Endquerschnitt des Stabes ist dabei nicht willkürlich vorschreibbar, weil die in beliebiger Verteilung etwa angebrachten Schubspannungen infolge unserer Voraussetzung undeformierbarer Querschnitte vom Stab (nötigenfalls von einem starren Endspant) deformationslos so umgelagert werden, daß sie zu den Normalspannungen passen.

Bis hierher haben wir offene und geschlossene Profile gemeinsam behandelt, und ein Unterschied zwischen beiden Typen war nur hervorgetreten bei der Formulierung der Bedingungen (11) und (12). Es besteht aber noch eine zweite, sehr wesentliche Verschiedenheit. Um zu erkennen, welcher Art sie ist, gehen wir zweckmäßig von den Ergebnissen der *St-Venant*schen Torsionstheorie aus[1]. Beim Rohr gibt es dort einen Schubfluß T', der wegen $dT/ds=0$ konstant, aber von Null verschieden ist. Auf die Veränderlichkeit der Schubspannungen über die Wanddicke zu achten, ist nicht notwendig. Beim offenen Profil dagegen verschwindet T an den freien Rändern und wegen $dT/ds=0$ also überall. Da kann das Torsionsmoment nur aufgenommen werden durch die mit der Dickenkoordinate veränderliche Schubspannung $\bar{\tau}$; sie ist mit ζ linear und in s, bis auf eine vernachlässigbare Störung an den Profilenden, konstant. Für den Torsionswiderstand ergibt sich daher die bekannte Formel

$$I_T=\frac{1}{3}\int t^3 ds\,, \tag{14}$$

das Integral über die gesamte Skelettlinie erstreckt. Mechanisch bedeutet das: Beim Rohr spielt die t^3 proportionale Plattendrillsteifigkeit der Wandung für den Widerstand gegen eine Verwindung keine Rolle; beim offenen Profil ist sie, da ein umlaufender Fluß nicht entstehen kann, wesentlich[2]. Dieser Unterschied zwischen den beiden Profilarten muß nun auch bei der Wölbkrafttorsion spürbar bleiben. Im Rohr treten unter Torsions- wie unter Wölbkraftbelastung Schubflüsse auf, die beide von derselben Art sind, und auf die geringfügige Veränderlichkeit der Schubspannungen über die Wanddicke einzugehen, besteht kein Anlaß. Anders beim offenen Profil. Da entstehen Schubflüsse nur infolge der Wölbkräfte. D. h. die Schubflüsse sind klein, und man muß, wenn man die Gl. (10) aufstellt, auf den Beitrag des in Richtung der Wanddicke t veränderlichen Anteils der Schubspannung achten. Selbstverständlich wird man dabei entsprechend dem Näherungscharakter einer von der Dünnwandigkeit ausgehenden Theorie annehmen können, daß $\bar{\tau}$ mit ζ linear ist und auch konstant in s, da die durch $\bar{\tau}$ gebildeten „Platten"-Drillmomente genau wie bei *St-Venant* nur in unmittelbarer Nähe der Profilenden gestört werden. Dagegen müssen die $\bar{\tau}$ bei Anwesenheit einer Wölbstörung wie alle andern Spannungen mit x veränderlich sein, so daß in der Formel für den von ihnen getragenen Anteil des Torsionsmomentes

$$\widetilde{M}_T=GI_T\vartheta \tag{15a}$$

mit I_T nach (14), die Verwindung ϑ eine Funktion von x wird. Das Schnittmoment, das eine äußere Torsionslast überträgt, besteht also bei wölbbehinderten offenen Profilen aus zwei Anteilen, dem *St-Venant*schen Anteil (15a) und dem Wölbanteil

$$\bar{M}_T=\int T r_t\, ds\,, \tag{15b}$$

die beide von der gleichen Größenordnung sein können, weil die an den großen Hebelarmen r_t (Größenordnung der Profilabmessungen h, b in Abb. 4) angreifenden Schubspannungen $\bar{\tau}=T/t$ klein, die an den kleinen Hebelarmen $\frac{2}{3}t$ angreifenden Schubspannungen $\bar{\tau}$ groß sind.

Zu den Querkräften liefert der veränderliche Anteil der Schubspannungen natürlich keinen Beitrag. Hier gilt beim offenen wie beim geschlossenen Profil

$$Q_y=\bar{Q}_y=\int T\cos\beta\, ds\,,\qquad Q_z=\bar{Q}_z=\int T\sin\beta\, ds\,,$$

und die fünf Bedingungsgleichungen für die Konstanten (8) lauten daher

beim offenen Profil	beim geschlossenen Profil
$T(0)=0,$	$u(s_1)=u(0),$
$T(s_1)=0,$	$T(s_1)=T(0),$
$\int T\cos\beta\, ds=0,$	$\int T\cos\beta\, ds=0,$
$\int T\sin\beta\, ds=0,$	$\int T\sin\beta\, ds=0,$
$GI_T\vartheta+\int T r_t\, ds=0,$	$\int T r_t\, ds=0.$

(16a–e)

[1] Vgl. z. B. K. *Marguerre*, Bauing. 21 (1940), S. 317.

[2] Wir unterscheiden die aus der Plattentheorie geläufige Drillsteifigkeit je Längeneinheit einer Platte (die zusammen mit den beiden Biegesteifigkeiten die elastische Widerstandsfähigkeit der Platte ausmacht) von der Torsionssteifigkeit des Stabes. Beim offenen Profil ist die Torsionssteifigkeit GI_T das längs s genommene Integral über die Drillsteifigkeit der Wandelemente. Beim Rohr fällt die Drillsteifigkeit der Wandung für die Torsionssteifigkeit des Stabes nicht ins Gewicht. (Der mechanische Grund ist der, daß das Rohr mit Endspanten eine allseits geschlossene Schale ist, die auf diese Belastung nur mit „Membran"-Spannungen antwortet, so daß Biege- und Drillsteifigkeit ruhig verschwindend klein sein können.)

3. Offene Profile. In Ziff. 2 haben wir alle mechanischen Überlegungen angestellt, die wir zur Durchführung der Wölbkrafttheorie dünnwandiger Stäbe brauchen. Wir wollen jetzt in die Diskussion des Eigenwertproblems für das offene Profil eintreten, und zwar wollen wir, um die Gedanken an Bestimmtes zu knüpfen, das in Abb. 4 gezeichnete Z-Profil betrachten, das bezüglich des Punktes 0 doppelt antimetrisch und daher einfacher zu übersehen ist als der allgemeine Fall mit fünf nichtverschwindenden Konstanten (8).

Der Punkt 0 in Abb. 4 erfährt keine Verschiebung; es ist daher $\alpha_{1n}=\alpha_{2n}=0$, und wenn wir die Bogenlänge s von 0 aus zählen, so lautet die Lösung (7):

$$u_n = A_n \cos\lambda_n s + B_n \sin\lambda_n s - \vartheta_n \int_0^s r_t' \cos\lambda_n(s'-s)\,ds' , \tag{17a}$$

$$\frac{T_n}{Gt\lambda_n} = -A_n \sin\lambda_n s + B_n \cos\lambda_n s - \vartheta_n \int_0^s r_t' \sin\lambda_n(s'-s)\,ds' . \tag{17b}$$

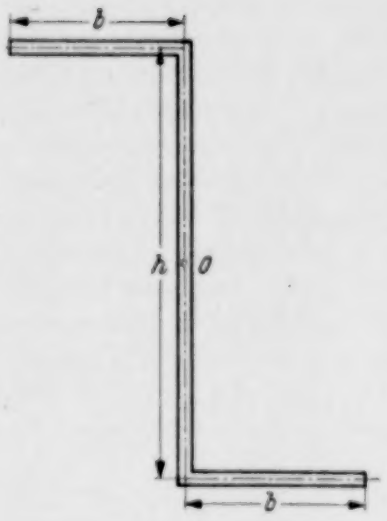


Abb. 4. Z-Profil, antimetrisch zu 0.

Da die beiden Querkraftbedingungen (16c, d) aus Symmetriegründen erfüllt sind, besteht das Gleichungssystem (16) nur aus drei Gleichungen für die drei Unbekannten A_n, B_n, ϑ_n. Anstatt seine Determinante formal aufzustellen und aus ihrem Verschwinden die Gleichung für die Eigenwerte λ_n zu gewinnen, benutzen wir einfacher die beiden Randbedingungen (16a, b), also

$$T(+a) = T(-a) = 0 \quad \text{mit} \quad a = \frac{h}{2} + b$$

dazu, um A_n, B_n durch ϑ_n auszudrücken. Es wird

$$-A_n \sin\lambda_n a + B_n \cos\lambda_n a - \vartheta_n \int_0^a r_t' \sin\lambda_n (s'-a)\,ds' = 0 ,$$

$$+A_n \sin\lambda_n a + B_n \cos\lambda_n a - \vartheta_n \int_0^a r_t' \sin\lambda_n (s'+a)\,ds' = 0 .$$

Wegen $r_t(-s) = -r_t(s)$ folgt daraus

$$B_n = 0 , \qquad A_n = -\frac{\vartheta_n}{\sin\lambda_n a} \int_0^a r_t \sin\lambda_n (s-a)\,ds . \tag{18}$$

Von dem System (16) bleibt nun nur noch eine einzige Gleichung, die Momentengleichung (16e)

$$\left.\begin{aligned} 0 = G\lambda_n t \Big(\frac{\vartheta_n}{\sin\lambda_n a} \int_0^a r_t \sin\lambda_n (s-a)\,ds \cdot \int_0^a r_t \sin\lambda_n s\,ds - \vartheta_n \int_0^a r_t \int_0^s r_t' \sin\lambda_n (s'-s)\,ds'\,ds \Big) + \\ + \frac{1}{2} G I_T \vartheta_n \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

mit

$$I_T = \frac{2a}{3} t^3 .$$

Sie ist in ϑ_n homogen und hat eine von Null verschiedene Lösung nur, wenn λ_n der transzendeten Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_n a}{\sin\lambda_n a} \int_0^1 \frac{r_t}{a} \sin\lambda_n (s-a)\,d\,\frac{s}{a} \cdot \int_0^1 \frac{r_t}{a} \sin\lambda_n s\,d\,\frac{s}{a} - \lambda_n a \int_0^1 \frac{r_t}{a} \int_0^{s/a} \frac{r_t'}{a} \sin\lambda_n (s'-s)\,d\,\frac{s'}{a}\,d\,\frac{s}{a} + \\ + \frac{1}{3}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

genügt. Die Ausrechnung der Integrale in (20) ist in unserem Beispiel sehr einfach, da r_t auf dem Steg verschwindet und auf den Flanschen den konstanten Wert $\pm h/2$ hat. Es ergibt sich

$$-\Big(\frac{h}{2a}\Big)^2 \Big[\frac{1}{\lambda_n a \sin\lambda_n a} (1-\cos\lambda_n b) \big(\cos\lambda_n (a-b) - \cos\lambda_n a\big) - \frac{1}{\lambda_n a} (\lambda_n b - \sin\lambda_n b) \Big] + \frac{1}{3}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2 = 0. \tag{21}$$

Um die kleinste Wurzel dieser Gleichung zu finden, entwickelt man zweckmäßig die trigonometrischen Funktionen nach Potenzen von λ_n; man erhält so

$$\Big(\frac{h}{2a}\Big)^2 \Big[\frac{(\lambda_n b)^2}{2} \frac{2ab-b^2}{2a^2} - \frac{b}{a} \frac{(\lambda_n b)^2}{6} + \cdots \Big] = \frac{1}{3}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2$$

oder, mit $2a = h + 2b$

$$(\lambda_0 b)^2 = \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{4b\,(h+2b)^2}{h^2\,(2h+b)}\,.$$

Es gibt also eine Wurzel λ_0 in der Nähe von Null:

$$\lambda_0 b = \frac{m\,t}{b}\,,$$

wobei der Zahlenfaktor m für „mittlere" Abmessungen ($h \approx 2b$) nur wenig von 1 verschieden ist. Die zugehörige Störung klingt mit

$$e^{-\overline{m}\,t\,x/b^2}, \qquad \overline{m} = m\sqrt{G t/E t_x}\,,$$

also sehr langsam ab. Mechanisch rührt das Abklingen her von dem Widerstand, den die Drillsteifigkeit der Profilwandung [t^3-Glied in (19)] einer elastischen Verwindung des Stabes entgegensetzt.

Von ganz anderem Typ sind die höheren Wurzeln. Auf deren Betrag hat das Glied $\frac{1}{3}\,(t/a)^2$ so gut wie keinen Einfluß; denn wenn man in (21) den Ausdruck $(2a/h)^2\,\frac{1}{3}\,(t/a)^2 = \frac{4}{3}\,(t/h)^2$ in die eckige Klammer hineinnimmt, kann man ihn dort zu dem Glied b/a schlagen, das dadurch nur um einen verschwindend kleinen Betrag geändert wird. Das heißt: die Wurzeln λ_n der transzendenten Gleichung sind für $n > 0$ unmittelbar die Nullstellen der eckigen Klammer. Wo diese liegen, ist am einfachsten an dem Beispiel $a = h = 2b$ zu übersehen. Da läßt sich die Nullforderung für die eckige Klammer auf die Form

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\lambda b}{2}\cdot\left(1 - \frac{\cos 2\lambda b}{\cos\lambda b}\right) = (\lambda b - \sin\lambda b)$$

bringen. Die linke Seite ist periodisch und springt bei $\lambda b = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, \ldots$ zwischen $+\infty$ und $-\infty$; die rechte schwankt mit einer Abweichung von ± 1 um die Gerade $-\lambda b$. Die Treffpunkte $\lambda_n b$ liegen daher in der Nähe der Sprungstellen und nähern sich ihnen für wachsende n immer mehr. Die erste Wurzel liegt bei $\lambda_1 b = 2{,}48$, und für $h = 2b$ wird daher

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{3{,}2}}{2{,}48}\,\frac{t}{b} = 0{,}72\,\frac{t}{b}\,;$$

für ein dünnwandiges Profil klingen also die höheren Eigenkraftgruppen um eine Größenordnung schneller ab als das zu λ_0 gehörige Hauptglied der Störung. (Die höheren Kraftgruppen sind, unabhängig von der Wandstärke — also auch für $t \to 0$ —, Wölbkraftgruppen in dem in der Einleitung definierten Sinne, die niedrigste ist es nur bei Vorhandensein einer Drillsteifigkeit der Profilwandung.)

Was wir hier durch die Zahlenrechnung an dem Beispiel des Z-Profils mit $h = 2b$ gefunden haben, gilt für offene Profile allgemein: Die zur kleinsten Wurzel gehörige Störform klingt langsam ab, die anderen im Verhältnis $n\,b/t$ schneller, wobei n der Größenordnung nach etwa die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Vom technischen Standpunkt aus ist also allein die niedrigste Wurzel der transzendenten Eigenwertgleichung interessant; für diese kann man aber eine Formel angeben, die allgemeingültig und zugleich besonders übersichtlich ist. Wir wollen das am Beispiel des punktsymmetrischen, aber sonst beliebigen Profils zeigen, indem wir in Gleichung (19), in der r_t noch irgendeine Funktion von s sein kann, den Grenzübergang $\lambda_0 \to 0$ vollziehen. Wenn wir $G\,\vartheta_n$ herausheben und $\lambda_n = \lambda_0 \to 0$ gehen lassen, wird aus (19)

$$\lambda_0^2\left[\int_0^a r_t \int_0^s r_t'\,(s'-s)\,ds'\,ds - \frac{1}{a}\int_0^a r_t (s-a)\,ds \cdot \int_0^a r_t\,s\,ds\right] = \frac{I_T}{2t}\,. \tag{20'}$$

Die eckige Klammer können wir durch Teilintegration umformen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int_0^s r_t'\,ds' = -\varphi(s)\,, \qquad \varphi(s') = \varphi'\,,$$

so liefert zweimalige Teilintegration des ersten Terms

$$\int_0^a r_t\left\{\int_0^s r_t'\,(s'-s)\,ds'\right\}ds = \int_0^a r_t\left\{\Big[-\varphi\cdot(s'-s)\Big]_0^s + \int_0^s \varphi'\,ds'\right\}ds = \int_0^a r_t \int_0^s \varphi'\,ds'\,ds$$

$$= \Big[-\varphi\int_0^s \varphi'\,ds'\Big]_0^a + \int_0^a \varphi^2\,ds = -\varphi(a)\int_0^a \varphi\,ds + \int_0^a \varphi^2\,ds\,.$$

Im zweiten Term wird jeder Faktor einmal der Teilintegration unterworfen:

$$\frac{1}{a}\int_0^a r_t(s-a)\,ds\cdot\int_0^a r_t s\,ds=\frac{1}{a}\left\{\left[-\varphi(s-a)\right]_0^a+\int_0^a\varphi\,ds\right\}\left\{\left[-\varphi s\right]_0^a+\int_0^a\varphi\,ds\right\}$$

$$=\int_0^a\varphi\,ds\left\{-\varphi(a)+\frac{1}{a}\int_0^a\varphi\,ds\right\}.$$

Beides zusammen ergibt also

$$\int_0^a\varphi^2 ds-\frac{1}{a}\left(\int_0^a\varphi\,ds\right)^2.$$

Dafür kann man schreiben

$$\int_0^a\varphi^{*2}ds$$

mit

$$\varphi^*=\varphi-\varphi_0,\qquad \varphi_0=\frac{1}{a}\int_0^a\varphi\,ds, \tag{22}$$

und aus (20′) wird daher

$$\lambda_0^2=\frac{I_T}{2t\int_0^a\varphi^{*2}ds}. \tag{22′}$$

Die Größe φ^* ist die spezielle Torsionsverwölbung des Querschnitts, die zu einer Verwindung $\vartheta=1$ gehört und deren Mittelwert $\frac{1}{a}\int_0^a\varphi^*ds$ verschwindet. In dem von uns betrachteten Sonderfall des punktsymmetrischen Profils konstanter Wandstärke ist das zugleich die „natürliche" Verwölbung, die bekanntlich durch die drei Bedingungen

$$\int_0^{s_1}\varphi^*dF=0,\qquad \int_0^{s_1}\varphi^*z\,dF=0,\qquad \int_0^{s_1}\varphi^*y\,dF=0, \tag{23′}$$

mit $dF=t_x ds$ unter den ∞^3 Verwölbungen des tordierten Profils ausgezeichnet ist.

Indem man schon in der Differentialgleichung (6) $\lambda_n=0$ setzt, was damit gleichbedeutend ist, an Stelle von (2*b*) die Aussage

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{24}$$

zu benutzen, d. h. die Formänderungswirkung des Schubflusses T zu vernachlässigen, kann man zeigen, daß sich für den Abklinggrad $\mu_0=\lambda_0\sqrt{Gt/Et_x}$ der niedrigsten Eigenfunktion ganz allgemein der Ausdruck

$$\mu_0^2=\frac{G\,I_T}{E\,C_M} \tag{25}$$

ergibt, mit

$$C_M=\int_0^{s_1}\varphi^{*2}t_x\,ds, \tag{25′}$$

wobei übrigens t_x mit s durchaus veränderlich sein kann[1]. Die zugehörige Verwölbung u, und damit auch die Wölbkraft $S=Et_x\partial u/\partial x$, verteilt sich wie die Wölbfunktion φ^* der *St-Venant*schen Torsion, und das Ergebnis unserer Rechnung ist also, daß man jede andere Wölbstörung zerlegen kann in einen φ^*-Anteil und einen Rest, der aber so schnell abklingt, daß in kleinem Abstand von der Störstelle nur der φ^*-Anteil bleibt.

Damit ist die Frage beantwortet, wie ein Stab mit offenem Profil auf eine beliebige Wölbstörung reagiert.

4. Rohre. Auch für die Behandlung eines durch Wölbkräfte beanspruchten Rohrprofils haben wir in Ziff. **2** schon alle mechanischen Aussagen zusammengestellt. Die rechnerische Verfolgung der zu den homogenen Gleichungen (16) gehörigen fünfreihigen Determinante, aus der sich die Eigenwerte bestimmen, ist auch hier sehr mühsam, so daß wir uns für die weitere Durch-

[1] *R. Kappus*, a. a. O., Formel (18) oder auch *K. Marguerre*, Ringbuch der Luftfahrttechnik II A 9, S. 14/15.

führung der Theorie analoge Beschränkungen auferlegen wie beim offenen Profil, damit nicht das mechanisch und mathematisch Wesentliche durch ein zu umfangreiches Formelwerk verdeckt wird. Wir wollen voraussetzen, daß das Rohrprofil zu den beiden Achsen y und z symmetrisch sei. Dann wird wieder $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, die Querkraftbedingungen (16c, d)′ werden trivial und scheiden aus der Untersuchung aus. Die verbleibenden drei Gleichungen werden so einfach, daß man wieder A_n, B_n mit Hilfe von (16a, b) durch ϑ_n ausdrücken kann und aus (16e) die Gleichung für λ_n unmittelbar erhält. Legt man noch den Nullpunkt der Bogenlänge in einen der vier Symmetriepunkte des Profilskeletts (beim Rechteck z. B. in eine der Seitenmitten) und zählt die Bogenlänge, beginnend beim gegenüberliegenden Symmetriepunkt, von $-s_1/2$ bis $+s_1/2$, so erhalten die Zusammenhangsbedingungen (16a, b) die Form

$$u(+s_1/2) = u(-s_1/2), \qquad T(+s_1/2) = T(-s_1/2),$$

und für die Konstanten A_n, B_n des Ansatzes (7) ergibt sich

$$A_n = 0, \qquad B_n = \frac{\vartheta_n}{\sin \lambda_n s_1/2} \int_0^{s_1/2} r_t \cos \lambda_n \left(s - \frac{s_1}{2}\right) ds. \tag{26a, b}$$

Natürlich kann man $A_n = 0$ auch daraus folgern, daß u als eine doppelt antimetrische Funktion in den Symmetriepunkten verschwinden muß, und der Ausdruck (26b) läßt sich einfacher schreiben, indem man ihn aus der Forderung

$$\int_0^{s_1/4} \frac{du_n}{ds}\, ds = u_n\left(\frac{s_1}{4}\right) = 0 \tag{27}$$

herleitet:

$$B_n = \frac{\vartheta_n}{\sin \lambda_n s_1/4} \int_0^{s_1/4} r_t \cos \lambda_n \left(s - \frac{s_1}{4}\right) ds. \tag{26b′}$$

Daß die Formeln (26b) und (26b′) gleichbedeutend sind, erkennt man, wenn man die aus der Querschnittssymmetrie folgenden Eigenschaften der periodischen Funktion $r_t(s)$ berücksichtigt. Die beiden Formeln gelten natürlich nur, wenn t nirgends springt, so daß der eine Ausdruck (7a) für die ganze Skelettlinie besteht. Beim Rechteck mit Eckgurten z. B., das wir in Ziff. 6 diskutieren werden, müßte man du_n/ds in (27) nach (2) und (3) ersetzen durch $T_n/Gt - r_t \vartheta_n$, und darin T_n mit Hilfe der Sprungbedingung (12′) bestimmen.

Indem man (26) in (7b) und das in (16e) einführt, erhält man (da $\vartheta_n \neq 0$ sein soll) die gesuchte transzendente Gleichung für die unendlich vielen Eigenwerte λ_n:

$$\frac{1}{\sin \frac{\lambda_n s_1}{4}} \int_0^{s_1/4} r_t \cos \lambda_n \left(s - \frac{s_1}{4}\right) ds \cdot \int_0^{s_1/4} r_t \cos \lambda_n s\, ds - \int_0^{s_1/4} r_t \int_0^{s} r_t' \sin \lambda_n (s' - s)\, ds'\, ds = 0. \tag{28}$$

Die Aufgabe, für ein gegebenes Rohr die Wölbkraftgruppen zu bestimmen, ist damit grundsätzlich gelöst. Man braucht nur für den aus der Querschnittsform folgenden Verlauf von $r_t(s)$ die Integrale in (28) auszuführen und die dadurch entstehende transzendente Gleichung für λ_n zu lösen. Dann geben (7a, b) sofort die Verwölbung u_n und den Schubfluß T_n. Die zugehörige Wölbkraft S_n folgt aus (2a). Da (28) eine transzendente Gleichung ist und daher unendlich viele Lösungen λ_n hat, so gibt es je einen Satz von unendlich vielen Funktionen $u_n(s)$, $T_n(s)$, $S_n(s)$. Sie sind die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (6) (oder zweier anderer, die wir statt dessen hätten aufstellen und der Behandlung unseres Problems zugrunde legen können). Es ist zweckmäßig, sie von den Parametern zu befreien, die noch in ihnen enthalten sind, und an Stelle von u_n, T_n die Funktionen

$$\varphi_n = \frac{u_n}{\vartheta_n}, \qquad \psi_n = \frac{T_n}{Gt\,\vartheta_n}$$

als Eigenfunktionen unseres Problems zu benutzen. φ_n und ψ_n hängen nur noch von Form und Größe des Querschnitts ab, nicht mehr vom Material des Stabes und der Intensität irgendeiner Beanspruchung.

Es läßt sich allgemein zeigen, daß die Eigenfunktionen eines jeden Systems untereinander orthogonal sind, d. h., daß

$$\int_0^{s_1} \varphi_n(s)\varphi_m(s)\, ds = 0, \qquad \int_0^{s_1} \psi_n(s)\,\psi_m(s)\, ds = 0 \tag{29}$$

ist, wenn φ_n und φ_m und ebenso ψ_n und ψ_m zwei zu verschiedenen Werten λ_n und λ_m gehörende Funktionen sind. Um das zu bestätigen, braucht man nur die beiden Funktionen nach (7a) und (7b) einzusetzen und bei der Ausführung der Integrale die Gleichung (28) und die schon erwähnten Symmetriebeziehungen in geeigneter Weise zu berücksichtigen.

Wir können die so gefundene Lösung benutzen, um die Spannungen und Formänderungen zu berechnen, die in einem Rohr entstehen, wenn man seinem Endquerschnitt $x=0$ eine beliebige Verwölbung $u(s)$ aufzwingt oder in ihm eine beliebige Gleichgewichtsgruppe von Normalkräften $S(s)$ angreifen läßt. — Man kann also z. B. einen Stab untersuchen, der ein Torsionsmoment M_T überträgt und dessen Verwölbung im Endquerschnitt durch eine Einspannung verhindert ist. Ohne diese Einspannung würde ein Spannungszustand nach der *Bredt*schen Theorie entstehen, zu dem die Verwölbung[1]

$$u_0(s) = \vartheta_0 \varphi(s) = \frac{M_T}{G I_T} \varphi(s)$$

gehört mit der „Wölbfunktion" (Verwölbung je Einheit der Verwindung)

$$\varphi(s) = -\int_0^s r_i' \, ds' + \frac{s}{s_1} \int_0^{s_1} r_i' \, ds' .$$

Um diese Verwölbung im Endquerschnitt zu beseitigen, überlagern wir eine Summe der eben aufgestellten Lösungen

$$u(s,x) = \vartheta_0 \left[\varphi(s) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(s) \, e^{-\mu_n x} \right].$$

Für den Querschnitt $x=0$ ist dann

$$u(s,0) = \vartheta_0 \left[\varphi(s) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(s) \right],$$

und das soll identisch Null sein. Die Koeffizienten C_n sind also die Entwicklungskoeffizienten von $-\varphi(s)$ nach den „Eigenverwölbungen" φ_n und können, da diese ein Orthogonalsystem bilden, berechnet werden als Quotienten zweier Integrale

$$C_n = -\frac{\int \varphi(s) \varphi_n(s) \, ds}{\int \varphi_n^2(s) \, ds}, \tag{30}$$

wobei diese Integrale grundsätzlich über den ganzen Umfang zu erstrecken sind, aber wegen der hier angenommenen doppelten Symmetrie des Querschnitts auch nur über die Hälfte oder ein Viertel des Umfangs erstreckt zu werden brauchen, beide natürlich in gleicher Weise. Die endgültige Lösung schreibt sich dann in der Form

$$\left.\begin{aligned} u(s,x) &= \vartheta_0 \left[\varphi(s) + \sum_1^{\infty} C_n \, e^{-\mu_n x} \, \varphi_n(s) \right], \\ S(s,x) &= -E t_x \vartheta_0 \sum_1^{\infty} C_n \mu_n \, e^{-\mu_n x} \, \varphi_n(s), \\ T(s,x) &= T_0 + G \vartheta_0 t \sum_1^{\infty} C_n \, e^{-\mu_n x} \, \psi_n(s), \\ \vartheta(x) &= \vartheta_0 \left[1 + \sum_1^{\infty} C_n e^{-\mu_n x} \right] \quad \text{mit} \quad \vartheta_0 = \frac{M_T}{G I_T}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

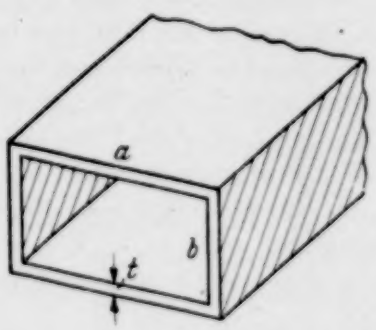


Abb. 5. Rechteck $a \cdot b$ als Rohrquerschnitt.

wobei T_0 der nach der *Bredt*schen Formel zu berechnende Schubfluß ist.

5. Das Rechteckrohr. Wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie die Eigenfunktionen aussehen, und wählen dazu ein Rohr mit rechteckigem Querschnitt, zunächst ohne Eckgurte (Abb. 5). Der erste Schritt ist die Berechnung der Eigenwerte λ_n. Dazu dient grundsätzlich Gleichung (28); die Rechnung wird aber in diesem einfachen Beispiel übersichtlicher, wenn wir T_n nach (7b) und (26b′) zunächst explizit schreiben und erst dann die in (28) geforderte Integration zur Bil-

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 27.

dung von M_T vornehmen. Wenn man den Nullpunkt der s-Zählung in die Mitte der Langseite a legt, folgt aus (26b'):

$$B_n = \frac{\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\left\{\frac{b}{2}\left[\sin\lambda_n\left(s-\frac{a+b}{2}\right)\right]_0^{a/2}+\frac{a}{2}\left[\sin\lambda_n\left(s-\frac{a+b}{2}\right)\right]_{a/2}^{(a+b)/2}\right\}$$
$$=\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\left(\frac{b}{2}+\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n b}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\right).$$

Die Ausführung des Integrals in (7b) im Bereich $0 \leqq s \leqq a/2$ liefert

$$\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\,\frac{b}{2}\,(-1+\cos\lambda_n s);$$

insgesamt gibt das für die Langseite

$$T_{na} = G t \vartheta_n\left(\frac{b}{2}+\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n b}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\cos\lambda_n s\right). \tag{32a}$$

Die Rechnung wird am übersichtlichsten, wenn wir die Bogenlänge nicht über die Ecke hinweg weiterzählen, sondern für die Schmalseite b eine neue, von deren Mitte aus rechnende Zählung einführen. Der Ausdruck für T_n in diesem Bereiche ergibt sich dann aus (32a) durch einfache Vertauschung von a und b:

$$T_{nb} = G t \vartheta_n\left(\frac{a}{2}+\frac{b-a}{2}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n a}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\cos\lambda_n s\right). \tag{32b}$$

Die Bildung von $M_T/4$ erfordert nun nur die Multiplikation der Ausdrücke (32) mit den Hebelarmen $b/2$ und $a/2$ und die Integration von 0 bis zu den Ecken $s=a/2$ und $s=b/2$. Man findet so als λ_n-Gleichung

$$\frac{a}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b}{2}\,\frac{a-b}{2\lambda_n}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}+\frac{b}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{2}\,\frac{b-a}{2\lambda_n}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n b}{2}\sin\frac{\lambda_n a}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}=0$$

oder

$$\frac{a\,b}{8}(a+b)=\frac{(a-b)^2}{4\lambda_n}\,\frac{\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}$$

oder auch

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda_n a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\lambda_n b}{2}=\frac{2(a-b)^2}{\lambda_n a\,b\,(a+b)}. \tag{33}$$

Sie hat z. B. für $a=2b$ folgende Lösungen:

$$\lambda_n\frac{a+b}{2}=\lambda_n\frac{s_1}{4}=173{,}16^\circ,\quad 356{,}58^\circ,\quad 718{,}29^\circ,\quad 898{,}64^\circ,\quad 1259{,}03^\circ,$$
$$=3{,}022,\quad 6{,}223,\quad 12{,}54\quad 15{,}68,\quad 21{,}97.$$

Die Schubspannungen sind durch (32) gegeben; für die Verwölbung u_n ergibt sich entsprechend

$$u_n=\vartheta_n\,\frac{a-b}{2\lambda_n}\,\frac{\sin\lambda_n\frac{b}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\sin\lambda_n s\quad\text{für}\quad -\frac{a}{2}\leqq s\leqq+\frac{a}{2}. \tag{34a}$$

$$u_n=\vartheta_n\,\frac{b-a}{2\lambda_n}\,\frac{\sin\lambda_n\frac{a}{2}}{\sin\lambda_n\frac{a+b}{2}}\sin\lambda_n s\quad\text{für}\quad -\frac{b}{2}\leqq s\leqq+\frac{b}{2}. \tag{34b}$$

Die beiden ersten Eigenverwölbungen u_n/ϑ_n sind in Abb. 6 aufgezeichnet. Vor allem für die größeren n unterscheiden sie sich nur wenig von einfachen Sinuslinien.

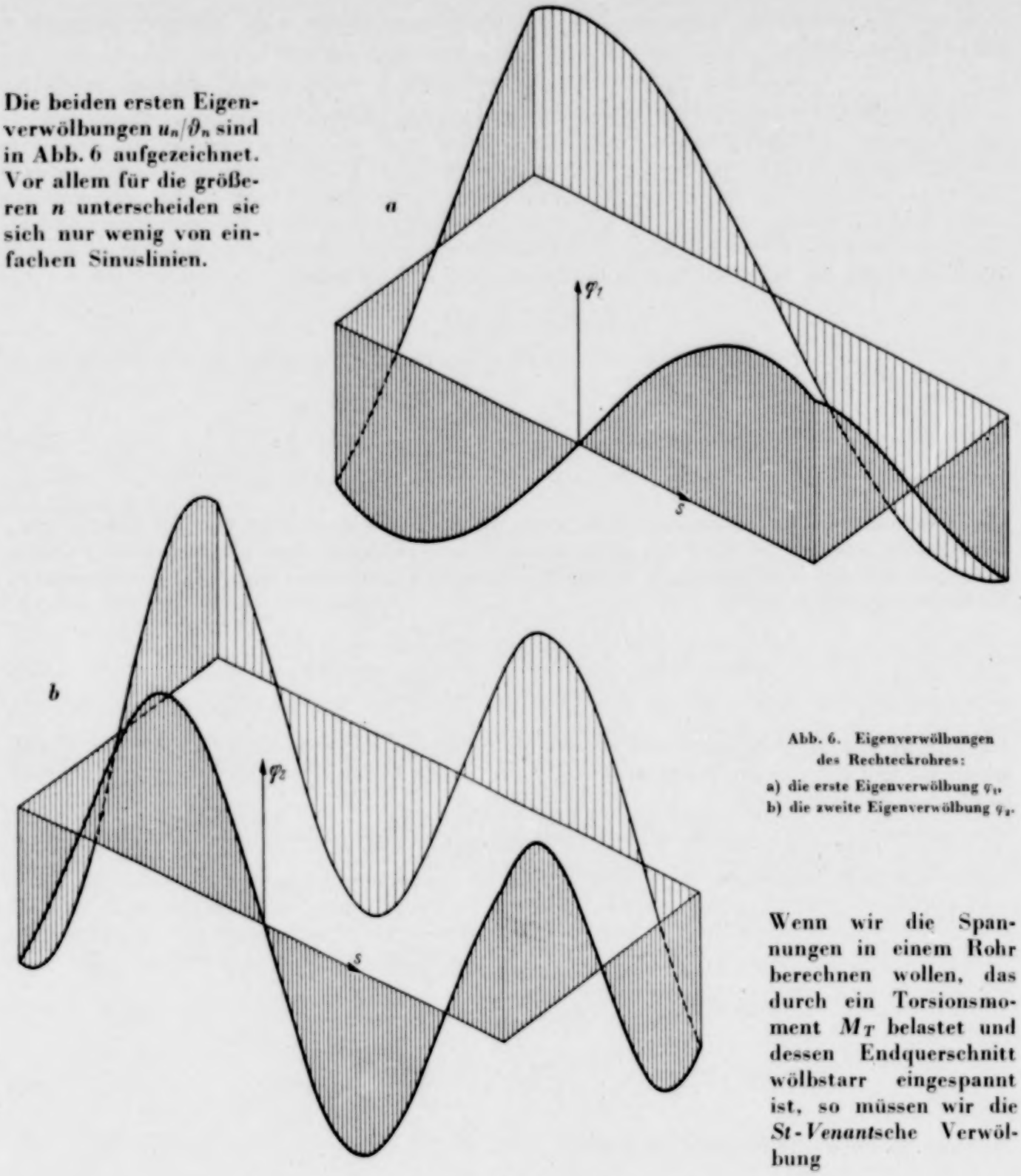


Abb. 6. Eigenverwölbungen des Rechteckrohres:
a) die erste Eigenverwölbung φ_1,
b) die zweite Eigenverwölbung φ_2.

Wenn wir die Spannungen in einem Rohr berechnen wollen, das durch ein Torsionsmoment M_T belastet und dessen Endquerschnitt wölbstarr eingespannt ist, so müssen wir die *St-Venant*sche Verwölbung

$$\left.\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{b(a-b)}{2(a+b)}\,s \quad \text{für die Langseite } a\,, \\ \varphi^* &= \frac{a(b-a)}{2(a+b)}\,s \quad \text{für die Schmalseite } b\,, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

nach den Eigenfunktionen (34) entwickeln. Wir finden für die Integrale in (30)

$$\int_0^{(a+b)/2} \varphi^* \varphi_n\, ds = \frac{(a-b)^2}{8\,\lambda_n^3}\left[\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\lambda_n a}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\lambda_n b}{2}} - \frac{a\,b\,\lambda_n}{a+b}\right],$$

was wegen (33) gleichwertig ist mit

$$\int_0^{(a+b)/2} \varphi^* \varphi_n\, ds = \frac{a^2 b^2}{2\,\lambda_n^2\,(a+b)} \tag{36a}$$

und entsprechend

$$\int_0^{(a+b)/2} \varphi_n^2 \, ds = -\frac{a\,b\,(a+b)}{16\,\lambda_n^2} + \frac{(a-b)^2}{16\,\lambda_n^2} \, \frac{a \sin^2 \frac{\lambda_n b}{2} + b \sin^2 \frac{\lambda_n a}{2}}{\sin^2 \lambda_n \frac{a+b}{2}} \,. \tag{36b}$$

Nachdem man die C_n gefunden hat, ergeben sich die Spannungen und Verformungen aus (31). Der Verlauf des Schubflusses T ist in Abb. 7 für einige Querschnitte aufgezeichnet. Man sieht, wie bald er die elementare *Bredt*sche Verteilung $T = \text{const}$ annimmt. Technisch bedeutet das, daß die Wölbbehinderung im Endquerschnitt nur einen örtlich sehr begrenzten Einfluß hat und für die Deformation im großen unwesentlich ist, sehr im Gegensatz zu dem Verhalten der Stäbe mit offenem Profil. Die örtlichen Wölbspannungen sind natürlich beträchtlich. Über ihre Größe gibt die hier dargestellte Theorie Auskunft.

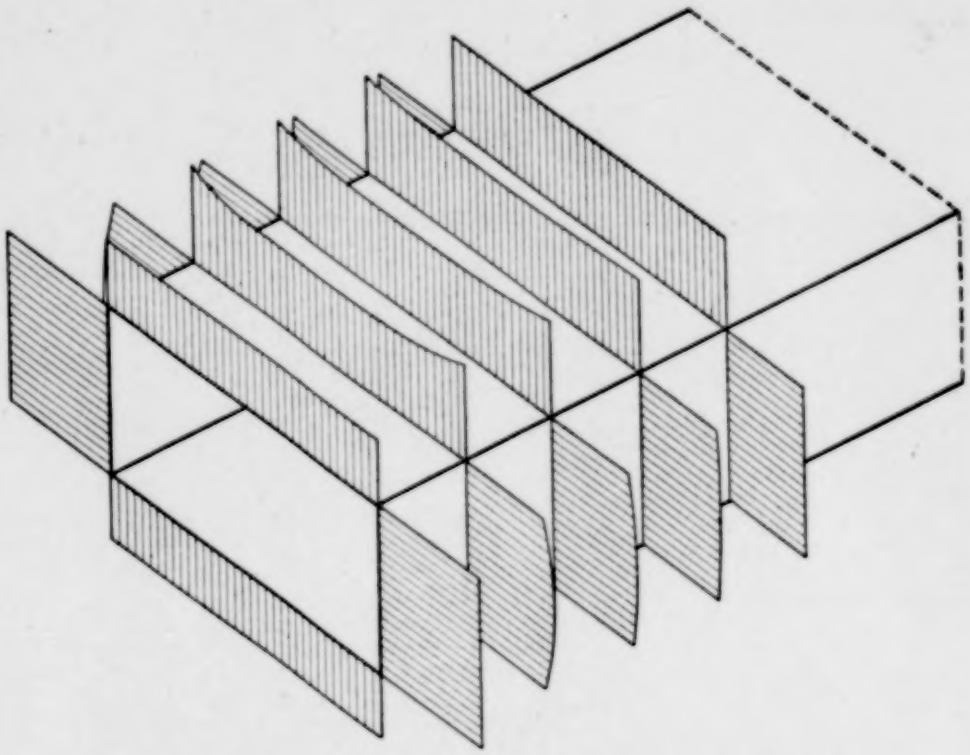


Abb. 7. Schubfluß $T(s, x)$ an einem wölbfest eingespannten Rechteckrohr ($a/b = 2$). Abklingen der „Störung" von links nach rechts.

6. Rechteckrohr mit Eckgurten. In dem Beispiel von Ziff. 5 hatte sich gezeigt, daß die Eigenwerte λ_n zueinander etwa im Verhältnis der ganzen Zahlen standen, daß also beim Rohr — im Gegensatz zum offenen Profil — der niedrigste Eigenwert keine Sonderrolle spielte, und dem entsprach das schnelle Abklingen der ganzen Störung. Auch beim geschlossenen Profil kann aber eine Auszeichnung des niedrigsten Eigenwertes (oder der niedrigsten Eigenwerte, bei mehr als 4 Gurten) und dementsprechend ein langsames Abklingen der zugehörigen Störung eintreten, dann nämlich, wenn das Rohr kräftige Längsgurte aufweist. Denn der in den Gurten konzentrierte Teil der Wölbkräfte wird durch die Rohrwandung natürlich langsamer abgebaut als die in der Wand selbst wirkenden Längsspannungen, und das Abklingproblem kann damit technisch sehr an Bedeutung gewinnen. Genau wie beim offenen Profil bringt es aber die Auszeichnung des niedrigsten Eigenwertes mit sich, daß man dann das Wesentliche des Vorgangs durch eine elementare Theorie erfassen kann; diese ist als Theorie des Kastenträgers schon lange bekannt, und unsere Aufgabe besteht nun darin, den Zusammenhang mit dieser Theorie herzustellen.

Wir beschränken uns zweckmäßig wieder auf ein einfaches Beispiel und wählen den doppeltsymmetrischen Rechteckkasten mit vier gleichen Eckversteifungen. Die Gleichungen (7a) und (7b) gelten jetzt für die vier Seiten einzeln mit A_{na}, B_{na} für die Langseiten a und A_{nb}, B_{nb} für die Schmalseiten b. Die Rechnung wird auch hier übersichtlicher, wenn wir für jede Seite eine besondere Zählung der Bogenlänge s einführen, die ihren Nullpunkt in der Seitenmitte hat. An den Ecken sind $4 \cdot 2$ Übergangsbedingungen von den Typen (12a) und (12′) zu erfüllen. Da es keine wesentliche Mehrarbeit macht, die Wanddicken von Lang- und Schmalseiten in (12′) als verschieden vorauszusetzen, wollen wir das tun. Bezeichnen wir sie mit t_a und t_b, den Gurtquerschnitt mit F, so heißen die beiden Bedingungen für eine der Ecken

$$u_{na}(+a/2) = u_{nb}(-b/2) \,, \tag{37}$$

und, wegen $t_x = t$, also $E\mu_n^2 = G\lambda_n^2$

$$T_{na}(+a/2) - T_{nb}(-b/2) = \frac{1}{2} G \lambda_n^2 F \left[u_{na}(+a/2) + u_{nb}(-b/2) \right] . \tag{38}$$

Da die aus der doppelten Symmetrie des Querschnitts folgende Bedingung $A_{na}=A_{nb}=0$ auch hier gilt, so sind, nach Einführung des Lösungsansatzes (7) (getrennt für jede Rechteckseite), (37) und (38) zwei Gleichungen zur Berechnung von B_{na} und B_{nb}:

$$B_{na}\sin\frac{\lambda_n a}{2}-\frac{\vartheta_n b}{2}\int_0^{a/2}\cos\lambda_n\left(s-\frac{a}{2}\right)ds=-B_{nb}\sin\frac{\lambda_n b}{2}+\frac{\vartheta_n a}{2}\int_0^{b/2}\cos\lambda_n\left(s-\frac{b}{2}\right)ds,$$

$$t_a\left[B_{na}\cos\frac{\lambda_n a}{2}-\frac{\vartheta_n b}{2}\int_0^{a/2}\sin\lambda_n\left(s-\frac{a}{2}\right)ds\right]-t_b\left[B_{nb}\cos\frac{\lambda_n b}{2}-\frac{\vartheta_n a}{2}\int_0^{b/2}\sin\lambda_n\left(s-\frac{b}{2}\right)ds\right]=$$
$$=\frac{\lambda_n F}{2}\left[u_{na}(+a/2)+u_{nb}(-b/2)\right]=\frac{\lambda_n F}{2}\left[B_{na}\sin\frac{\lambda_n a}{2}-B_{nb}\sin\frac{\lambda_n b}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\vartheta_n b}{2}\int_0^{a/2}\cos\lambda_n\left(s-\frac{a}{2}\right)ds+\frac{\vartheta_n a}{2}\int_0^{b/2}\cos\lambda_n\left(s-\frac{b}{2}\right)ds\right].$$

Ausführung der Integrale und Umordnung ergibt

$$B_{na}\left(t_a\cos\frac{\lambda_n a}{2}-\frac{\lambda_n F}{2}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\right)-B_{nb}\left(t_b\cos\frac{\lambda_n b}{2}-\frac{\lambda_n F}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right)=$$
$$=\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\left[\frac{t_b a-t_a b}{2}+\frac{b}{2}\left(t_a\cos\frac{\lambda_n a}{2}-\frac{\lambda_n F}{2}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\right)-\frac{a}{2}\left(t_b\cos\frac{\lambda_n b}{2}-\frac{\lambda_n F}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right)\right],$$

$$B_{na}\sin\frac{\lambda_n a}{2}+B_{nb}\sin\frac{\lambda_n b}{2}=\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\left[\frac{b}{2}\sin\frac{\lambda_n a}{2}+\frac{a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right].$$

Mit

$$\Delta=t_a\cos\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}+t_b\cos\frac{\lambda_n b}{2}\sin\frac{\lambda_n a}{2}-\lambda_n F\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2} \tag{39}$$

folgt daraus

$$\left.\begin{aligned}B_{na}&=\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\left[\frac{b}{2}+\frac{t_b a-t_a b}{2\Delta}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right],\\ B_{nb}&=\frac{\vartheta_n}{\lambda_n}\left[\frac{a}{2}+\frac{t_a b-t_b a}{2\Delta}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die Schubflüsse werden daher nach (7b)

$$\left.\begin{aligned}T_{na}&=G\vartheta_n t_a\left(\frac{b}{2}+\frac{t_b a-t_a b}{2\Delta}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\cos\lambda_n s\right),\\ T_{nb}&=G\vartheta_n t_b\left(\frac{a}{2}+\frac{t_a b-t_b a}{2\Delta}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\cos\lambda_n s\right),\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

und die Momentenintegration (16e) führt auf die Eigenwertgleichung

$$t_a\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\,\frac{t_b a-t_a b}{2\lambda_n\Delta}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right]+t_b\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\,\frac{t_a b-t_b a}{2\lambda_n\Delta}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}\right]=0$$

oder

$$\frac{a b}{8}(t_b a+t_a b)=\frac{(t_b a-t_a b)^2}{4\lambda_n\Delta}\sin\frac{\lambda_n a}{2}\sin\frac{\lambda_n b}{2}$$

oder schließlich

$$t_a\operatorname{ctg}\frac{\lambda_n a}{2}+t_b\operatorname{ctg}\frac{\lambda_n b}{2}=\frac{2(t_b a-t_a b)^2}{\lambda_n a b(t_b a+t_a b)}+\lambda_n F. \tag{42}$$

Für $F=0$, $t_a=t_b=t$ kämen wir zurück auf die alte Gleichung (33). Für $F\neq 0$ interessiert uns vor allem die erste Wurzel λ_1 der Gleichung (42). Ist F hinreichend groß, so erhalten wir sie aus einer Reihenentwicklung der Cotangens-Funktionen:

$$\frac{2t_a}{\lambda_1 a}+\frac{2t_b}{\lambda_1 b}-t_a\frac{\lambda_1 a}{6}-t_b\frac{\lambda_1 b}{6}=\frac{2(t_b a-t_a b)^2}{\lambda_1 a b(t_b a+t_a b)}+\lambda_1 F.$$

Daraus folgt

$$\lambda_1^2=\frac{8}{\left[F+\frac{1}{6}(t_a a+t_b b)\right]\left(\frac{a}{t_a}+\frac{b}{t_b}\right)}. \tag{43}$$

Der Summand $\frac{1}{6}(t_a a+t_b b)$ neben F ist eine Art mittragende Querschnittsfläche der Rohrwandung.

Er stammt aus dem zweiten Glied der ctg-Entwicklungen in (42) und zeigt, in welcher Richtung der Eigenwert sich ändert, wenn at/F von Null verschiedene Werte annimmt. Mit

$$F + \frac{1}{6}(t_a a + t_b b) = F_e$$

(effektiver Querschnitt) lautet die Formel für den Abklinggrad

$$\mu_1^2 = \frac{8G}{EF_e} \frac{1}{\frac{a}{t_a} + \frac{b}{t_b}}. \tag{43'}$$

Das ist eine aus der Kastenträgertheorie wohlbekannte Beziehung, die sich dort ergibt, wenn man jede der vier Wände als einen Träger mit hohem Steg behandelt, der längs der Eckgurte mit den Nachbarn zusammenhängt und eine Biege- und Schubverformung erleidet, die die Einzelträgerquerschnitte eben läßt.

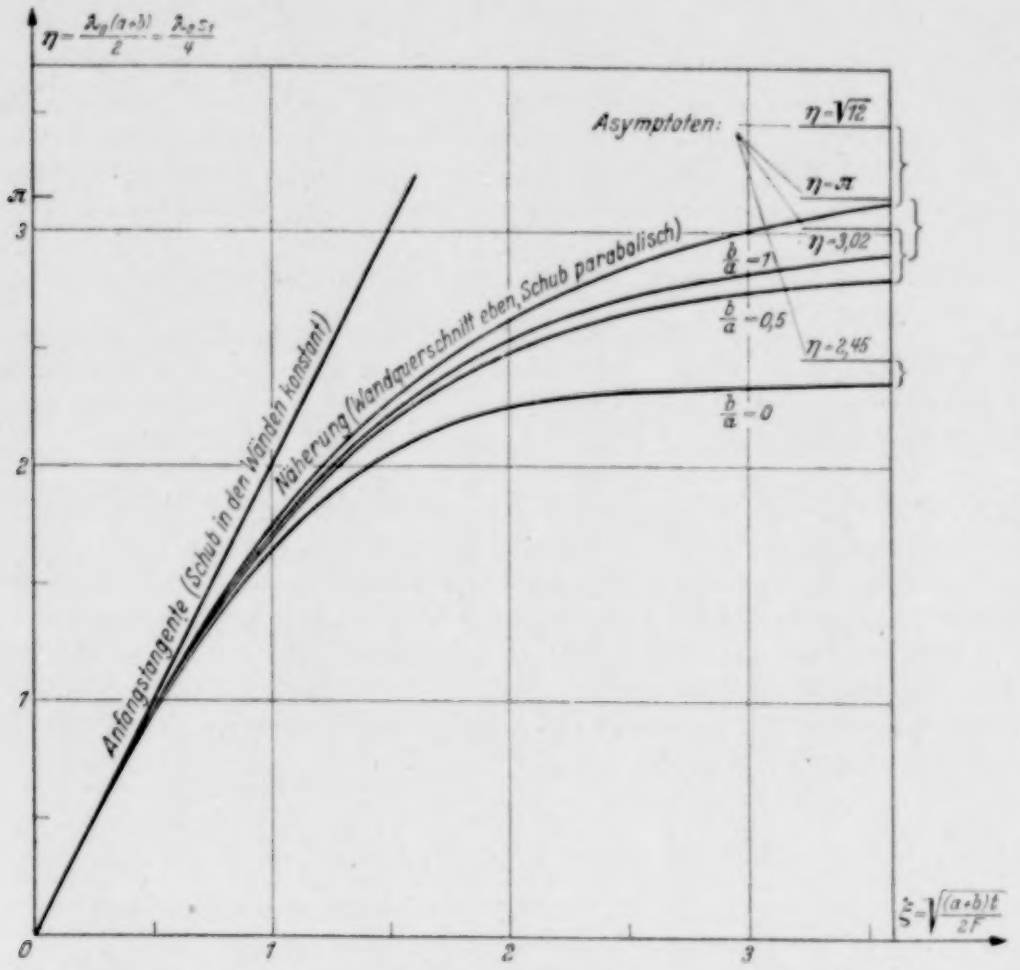


Abb. 8. Der niedrigste Eigenwert λ_1 in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis Wandung : Gurt. Seitenverhältnis b/a als Parameter.

Wir verfolgen die Kastenträgertheorie[1] im Rahmen dieses Aufsatzes nicht weiter, sondern geben nur noch das Diagramm Abb. 8, das zeigen soll, bis zu welchem Querschnittsverhältnis Wand zu Gurt der niedrigste Eigenwert nach (43) berechnet werden darf. Wir beschränken uns dabei auf den Fall $t_a = t_b$, wo (42) mit den Abkürzungen

$$\xi = \sqrt{\frac{(a+b)t}{2F}}, \qquad \eta = \frac{\lambda_1 (a+b)}{2}, \qquad \zeta = \frac{b}{a} \tag{44}$$

die Form

$$\operatorname{ctg} \frac{\eta}{1+\zeta} + \operatorname{ctg} \frac{\eta\zeta}{1+\zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta} + \frac{\eta}{\xi^2}$$

oder

$$\xi^2 = \frac{\eta^2}{\eta \operatorname{ctg} \frac{\eta}{1+\zeta} + \eta \operatorname{ctg} \frac{\eta\zeta}{1+\zeta} - \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}} \tag{45'}$$

[1] *H. Ebner*, DVL.-Jahrbuch 1933, III, S. 72.

annimmt, sich also darstellen läßt als eine von dem Parameter ζ abhängige Schar von Kurven $\eta(\xi)$. Die Grenzkurven dieser Schar sind

$$\xi^2 = \frac{\eta}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \qquad \text{für } \zeta = 1 \text{ (Quadrat)} \tag{45'}$$

und

$$\xi^2 = \frac{\eta^2}{3 + \eta \operatorname{ctg} \eta} \qquad \text{für } \zeta = 0 \text{ oder } \zeta = \infty \text{ (sehr flache Rechtecke).} \tag{45''}$$

Die Formel (43) geht mit den Abkürzungen (44) über in

$$\eta = \frac{\sqrt{12}\,\xi}{\sqrt{3+\xi^2}}, \tag{46}$$

die von $\zeta = b/a$ unabhängige, für alle Kurven (45) gemeinsame Schmiegungskurve in der Umgebung des Nullpunktes ($\eta = 2\xi$ ist die Nullpunktstangente). Man erkennt, daß, solange der Gurtquerschnitt nicht kleiner ist als der der Wände ($\xi \leqq 1$), die Formel (43) eine sehr gute Näherung abgibt. Für $\frac{1}{2}(a+b)t > F$ wird sie bald unbrauchbar, und zwar aus zwei Gründen: erstens wird die Formel zahlenmäßig schlecht, weil sich die Kurven (45), vor allem bei flachen Rechteckkästen, von der Grenzkurve mehr und mehr entfernen; zweitens ist es bei den hohen Abklinggraden, die zu Flächenverhältnissen $\xi^2 > 1$ gehören, unzulässig, die niedrigste Wurzel der Gleichung (42) allein als wesentlich gelten zu lassen: Die nächst höhere liegt im Falle $b = a$ z. B. bei

$$\eta = \eta_2 = 6{,}85 \qquad [\xi = 1 \text{ in } (45)],$$

hat also knapp den vierfachen Betrag von $\eta_1 = 1{,}72$, und da kann man die Abklinggrade nicht mehr als der Größenordnung nach verschieden ansehen. Technisch verliert glücklicherweise das ganze Problem gleichzeitig viel an Bedeutung: Die gesamte Wölbstörung klingt, wie Abb. 7 an dem Zahlenbeispiel $a = 2b$, $F = 0$ zeigt, so schnell ab, daß ihre Bestimmung meist nicht mehr nötig ist.

Für Rohre, deren Querschnitt gegen eine Deformation in seiner Ebene hinreichend geschützt ist (sei es durch hinreichende Dicke der Wandung, sei es durch viele starre Spante), gilt also das folgende Ergebnis: Wenn Längsgurte ganz fehlen oder schwach sind, klingen Wölbstörungen sehr schnell ab, haben also technisch meist keine Bedeutung. Will man sie bestimmen, so kann das nur mit Hilfe der hier gegebenen Theorie geschehen, die auf unendlich viele Eigenkraftgruppen führt. Sind kräftige Längsgurte vorhanden, so klingt eine bestimmte Wölbstörungsgruppe langsam ab. Zu ihrer Untersuchung, die technisch von großer Wichtigkeit sein kann, reichen die Kastenträgerformeln aus[1].

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 37.

(Eingegangen am 24. Dezember 1948.)

Anschriften der Verfasser: Professor Dr. *W. Flügge*, 2015 Emerson Street, Palo Alto Cal. (USA).
Professor Dr. *K. Marguerre*, (16) Darmstadt, Frankfurter Straße 84.

Der Wirkungsgrad der Planetengetriebe.

Von **R. Poppinga.**

1. Einleitung. Wenn man sich bei der Lösung einer getriebetechnischen Aufgabe aus bestimmten Gründen für ein Planetengetriebe entscheiden möchte, so interessiert vielfach die Frage, wie hoch sein voraussichtlicher Wirkungsgrad im Vergleich zu dem des in der Regel verwendeten Standgetriebes sein wird. In der nachfolgenden Untersuchung wird an einer Reihe von Beispielen gezeigt, wie man derartige Vergleichszahlen überschlägig vorausberechnen kann.

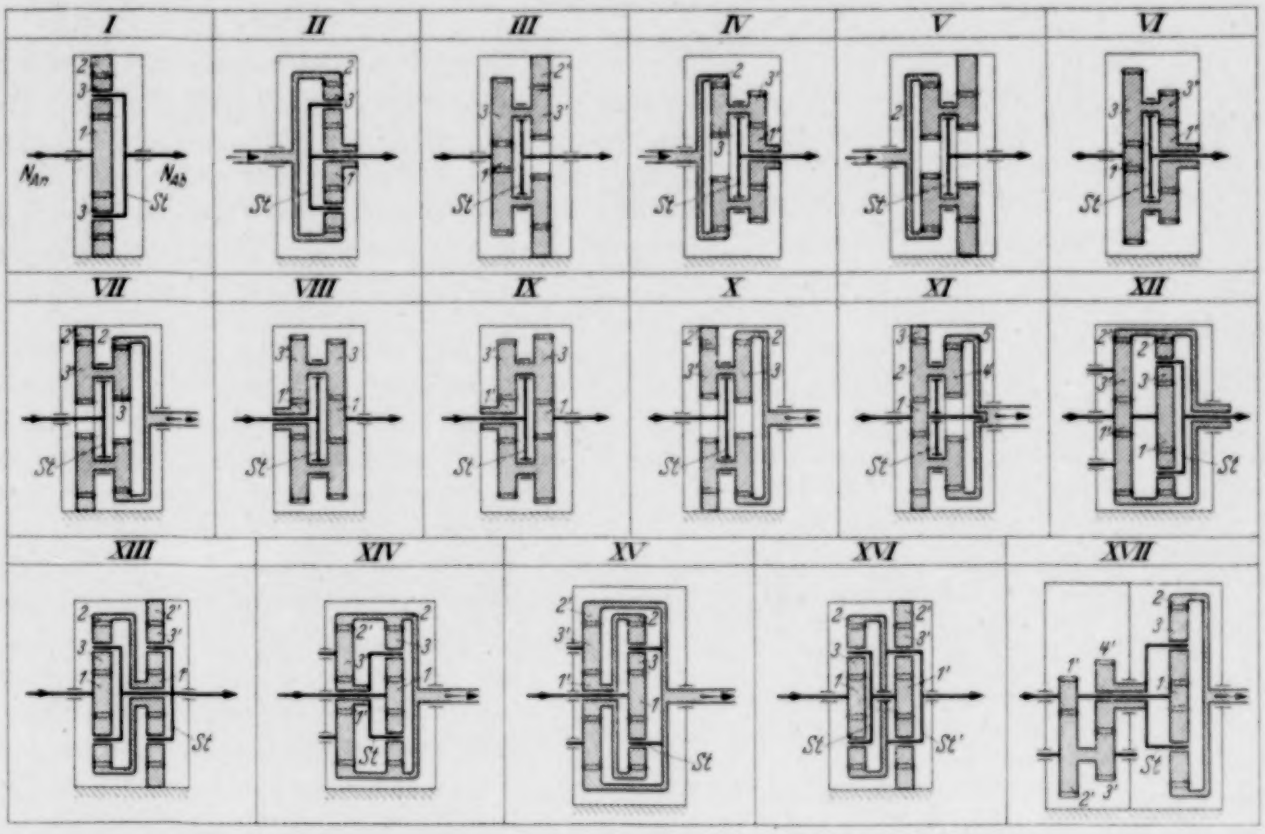


Abb. 1. Schematische Darstellung der behandelten Planetengetriebe, *st* = Steg, Planetenradträger.

Es werden insgesamt 17 rückkehrende (gleichachsige) Planetengetriebe behandelt, die in Abb. 1 schematisch wiedergegeben sind. Die Typen I bis X stellen die grundlegenden Bauformen drei- und vierräderiger Planetengetriebe dar und XI bis XVII häufig verwendete zusammengesetzte Planetengetriebe. Alle Getriebe haben je ein An- und ein Abtriebsglied, sind also reine Übersetzungsgetriebe im Gegensatz zu den Verzweigungsgetrieben (Summengetriebe oder Differentiale), auf die hier nicht eingegangen wird.

2. Wirkungsgrad des Standgetriebes. Bei der Berechnung des Planetengetriebe-Wirkungsgrades wird davon ausgegangen, daß dieser durch den Wirkungsgrad des Standgetriebes ausgedrückt werden kann, der sich für jede Verzahnung nach folgender Beziehung errechnen läßt:[1] [2]

$$\eta_v = 1 - v = 1 - \left(\xi \mu \varepsilon \pi \frac{1 - \frac{1}{i}}{2 z_1} \right) \tag{1}$$

[1] *M. ten Bosch*, Vorlesungen über Maschinenelemente. Berlin 1940.
[2] *R. Poppinga*, Stirnrad-Planetengetriebe. Stuttgart 1949.

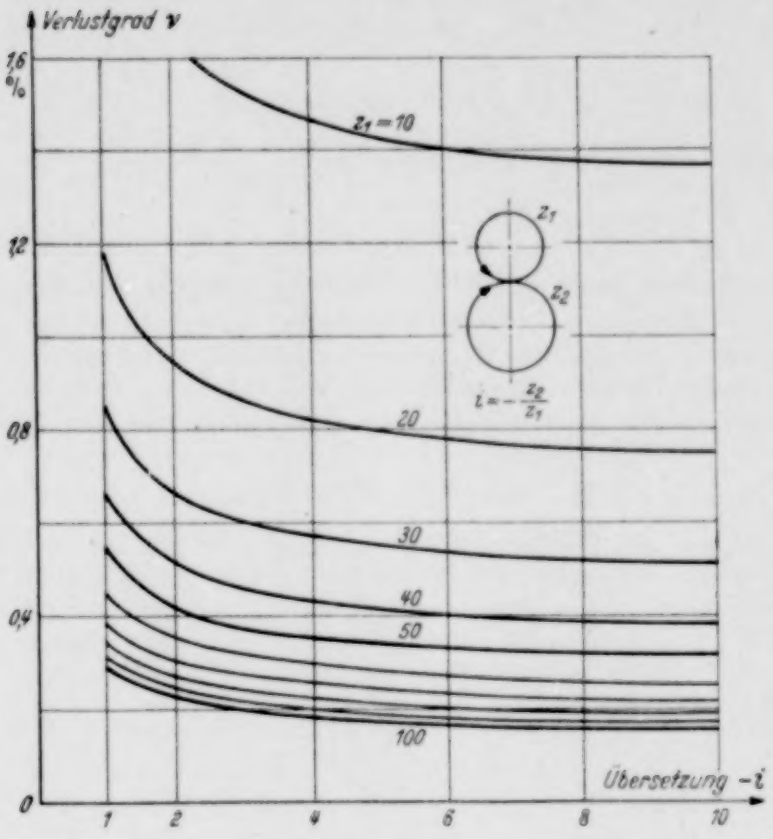
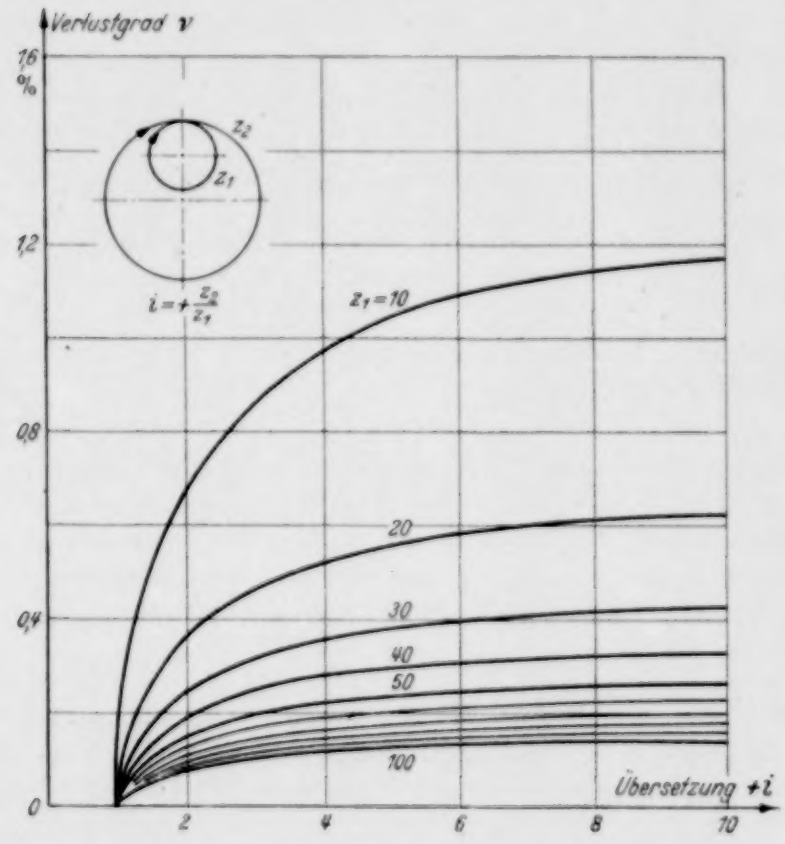


Abb. 2 und 3. Der Verlustgrad von Außen- und Innenverzahnungen in Abhängigkeit von der Übersetzung bei verschiedenen Ritzelzähnezahlen.

Annahmen: Zahnform- und Teilungsfehler vernachlässigt. Zahnreibungsziffer $\mu = 0{,}05$. Evolventenverzahnung ohne Korrektur, $\alpha = 20°$. Kopfkürzung der Innenzahnräder.



Hierin bedeuten

$\eta_v = N_{Ab}/N_{An}$ = Verzahnungswirkungsgrad = Verhältnis der Abtriebs- (Nutz-) leistung zur Antriebsleistung,

$\nu = N_v/N_{An}$ = Verlustgrad = Verhältnis der Verlustleistung zur Antriebsleistung,

ξ = Zahnform- und Teilfehlerfaktor,

μ = Zahnreibungsziffer,

ε = Überdeckungsgrad,

$i = \pm z_2/z_1$ = Übersetzungsverhältnis,

z_1 = Zähnezahl des außenverzahnten Rades (kleines Rad, Ritzel),

z_2 = Zähnezahl des innenverzahnten oder außenverzahnten Rades (großes Rad),

das —-Zeichen gilt für die Außenverzahnung (Gegenläufigkeit),

das +-Zeichen gilt für die Innenverzahnung (Gleichläufigkeit).

Der nach dieser Formel errechnete Wirkungsgrad läßt die Lagerverluste außer acht, die nach *Budnick*[1] bei heutigen Getrieben mit Wälzlagern, guter Schmierung und geringen Zapfendurchmessern gegenüber den Verzahnungsverlusten auch nicht ins Gewicht fallen und daher vernachlässigt werden können.

Um den Einfluß der Übersetzung i, der Zähnezahlen und der Verzahnungsart (Außen- oder Innenverzahnung) auf den Wirkungsgrad zu zeigen, ist in den Abb. 2 und 3 der Verlustgrad ν als Funktion von i mit z_1 als Parameter bei vereinfachten Annahmen ($\xi = 1$, $\mu = 0{,}05$) dargestellt worden, und zwar je für Außen- und Innenverzahnung. Die erhaltenen beiden Hyperbelscharen gestatten folgende Aussagen:

a) Allgemein fällt der Verlustgrad beider Verzahnungsarten mit wachsender Zähnezahl ab. Eine Erhöhung der Ritzelzähnezahl im Bereich $z_1 = 10$ bis 20 führt besonders bei niederer Übersetzung zu einer starken Abnahme des Verlustgrades.

b) Bei gleichbleibendem z_1 fällt der Verlustgrad einer Außenverzahnung mit steigender Übersetzung ab, während er bei der Innenverzahnung zunimmt.

c) Bei gleichem i und z_1 ist der Verlustgrad einer Außenverzahnung größer als der einer Innenverzahnung.

[1] *A. Budnick*, Zeichnerische Behandlung von Kräften und Momenten in Koppel- und Rädertrieben. VDI.-Forsch.-Heft 388 (1938).

d) Bei i-Werten etwas über 1 weisen Innenverzahnungen sehr geringe Zahnreibungsverluste auf. Der Verlustgrad ist hier um ein Vielfaches geringer als der von Außenverzahnungen.

Neuzeitliche Getriebe mit außenverzahnten Rädern erreichen mittlere Verlustgrade von 0,5 bis 2% für jeden Zahneingriff[1]. Über Innenverzahnungen sind bisher keine Ergebnisse veröffentlicht worden. Daß sie aber bei gleichen sonstigen Bedingungen wesentlich geringere Verluste aufweisen müssen als Außenverzahnungen, mag folgendes Beispiel zeigen. Wählt man $\xi=1$, $\mu=0{,}1$, $z_1=100$, $z_2=110$ (damit $i=\pm 1{,}1$), so ergibt sich nach (1) für die Außenverzahnung $\nu=0{,}6\,\%$ und für die Innenverzahnung $\nu=0{,}03\,\%$.

Die hier vorwiegend behandelten Planetengetriebe sind mit Innen- und Außenverzahnungen in gemischter Bauart ausgeführt. Bei ihnen kann man nach *Budnick* gleichen Verlustgrad für jeden Zahneingriff ansetzen, ohne einen großen Fehler zu begehen. Von dieser Vereinfachung ist daher auch bei den folgenden Wirkungsgrad-Rechnungen Gebrauch gemacht worden. Es wurde durchweg mit einem Verlustgrad von 1% je Verzahnung gearbeitet. Legt man aber diesen Wert auch für reine Innengetriebe zugrunde, so würden diese beim Vergleich zu ungünstig beurteilt. Man muß hier geringere Verlustgrade ansetzen, die man überschlägig nach (1) ermitteln kann.

3. Die dreiräderigen Planetengetriebe I und II. Da nach einer Beziehung zwischen dem Wirkungsgrad des Planetengetriebes und dem des Standgetriebes gefragt ist, wird zu untersuchen sein, ob und in welcher Weise beide Getriebeformen miteinander zusammenhängen. Das Planetengetriebe I nach Abb. 1 geht in ein Standgetriebe über, wenn der Steg festgestellt und das Hohlrad beweglich gemacht werden. Kinematisch kann man diese Umwandlung auch so deuten, als ob das gesamte Getriebesystem mit einer Drehzahl umlaufen würde, die gleich groß, aber entgegengesetzt der Stegdrehung ist. Der Steg ist dann relativ zum Gehäuse in Ruhe, und das derart rotierende Getriebe kann als ein Standgetriebe mit angenommenem bekanntem Verlustgrad aufgefaßt werden. Die Überlagerung des Planetengetriebes mit dieser Zusatzdrehzahl verändert weder die Relativdrehzahlen seiner Glieder untereinander noch die Kräfte, Momente, Leistungen und Verluste. Ventilationsverluste können wie die Lagerverluste außer acht bleiben. Nimmt man bei diesem Getriebe an, dem Rad 1 werde die Leistung N_1 zugeführt und der Steg führe die Leistung N_{st} ab, so weist das durch die erwähnte Zusatzdrehung entstandene Getriebe als Antriebsglied ebenfalls das Rad 1 auf, während der Abtrieb vom Steg auf das Hohlrad 2 übergegangen ist. Die Verlustleistung dieses Standgetriebes ist dann

$$N_V=N_1-N_2\,. \tag{2}$$

Der Wirkungsgrad des Zahneingriffs der Räder 1; 3 wird vereinbarungsgemäß gleich dem der Verzahnung 3;2 gesetzt. Wird er mit η_v bezeichnet, so folgt mit $N_2=(N_1\eta_v)\,\eta_v$

$$N_V=N_1(1-\eta_v^2) \tag{3}$$

oder mit $\nu=1-\eta_v$ auch angenähert, wenn man $\nu^2=0$ setzt, da ν sehr klein ist,

$$N_V=2\nu N_1\,. \tag{4}$$

Die Größe N_1 als die Umfangsleistung des Rades 1 ergibt sich zu

$$N_1=P_1 v_{1st}=P_1 r_1 \omega_{1st}\,.$$

Der doppelte Zeiger bei ω soll kennzeichnen, daß es sich um eine relative Winkelgeschwindigkeit handelt, nämlich um die des umlaufenden Rades 1 gegenüber dem, gemäß der oben getroffenen Annahme, festgestellten, also ruhenden Steg st. Die Umfangsgeschwindigkeit v_{1st} entspricht der Geschwindigkeit, mit der die Zähne in der Verzahnung 1;3 (und auch 2;3) aufeinander abrollen, der sogenannten Wälz- oder Zahneingriffsgeschwindigkeit[2].

Bei dem wirklichen Planetengetriebe ist diese Wälzgeschwindigkeit natürlich nicht mit der Umfangsgeschwindigkeit identisch. Wie aus dem als bekannt vorausgesetzten Geschwindigkeitsplan nach *Kutzbach*[3] [4] hervorgeht, setzt sich die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades aus der

---

[1] Siehe Fußnoten 1 auf Seite 39 und 40.

[2] *H. v. Thüngen*, Z. VDI. 83 (1939), S. 730.

[3] Siehe Fußnote 2 auf S. 39.

[4] *R. Zajonz*, Die zeichnerische Untersuchung von Stirnrad-Planetengetrieben. Diss. Techn. Hochschule Dresden 1938.

Wälz- und einer sogenannten Zahnmitnahmegeschwindigkeit zusammen (vgl. Abb. 4). Hier ergibt sich

$$\underset{\text{(Umfangsgeschwindigkeit)}}{r_1\omega_{12}} = \underset{\text{(Wälzgeschwindigkeit)}}{r_1(\omega_{12}-\omega_{st_2})} + \underset{\text{(Mitnahmegeschwindigkeit)}}{r_1\omega_{st_2}}$$

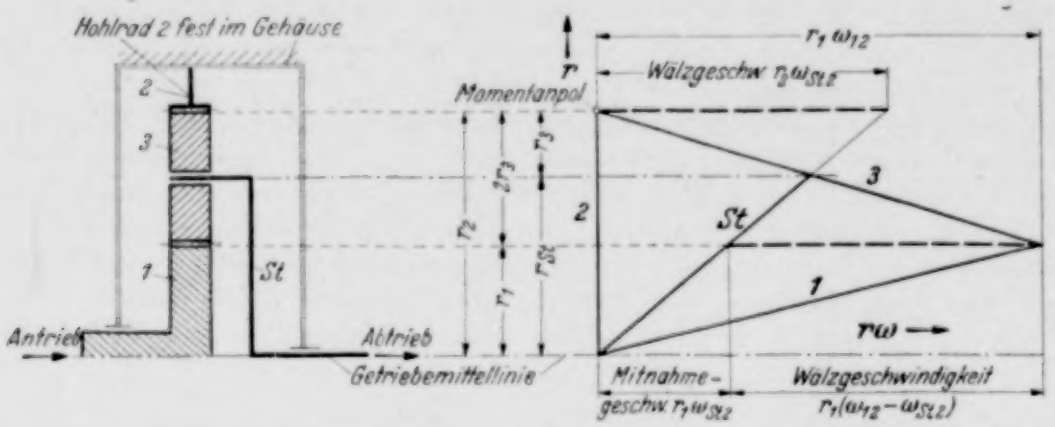


Abb. 4. Der Geschwindigkeitsplan nach *Kutzbach* für das Getriebe I.
1 = Sonnenrand (außenverzahnt), 2 = Hohlrad (innenverzahnt),
3 = Planetenrad (außenverzahnt), *st* = Steg, Planetenradträger.

Entsprechend läßt sich die Antriebs- bzw. Umfangsleistung in eine Zahnwälzleistung N_W und eine Zahnmitnahmeleistung N_M zerlegen:

$$N_1 = N_{W_1} + N_{M_1} ,$$

worin

$$N_{W_1} = P_1 r_1 (\omega_{12} - \omega_{st_2})$$

ist. Hier bedeutet der Zeiger bei ω, daß es sich um relative Winkelgeschwindigkeiten des Rades 1 bzw. Steges *st* gegenüber dem ruhenden Rad 2 handelt. Die Wälzgeschwindigkeit ist gleich der Relativgeschwindigkeit des Rades 1 gegenüber dem jetzt umlaufenden Steg. Wie erwähnt, sind aber die Relativgeschwindigkeiten von Stand- und entsprechendem Planetengetriebe immer gleich, so daß hier gesetzt werden kann

$$\omega_{1st} = \omega_{12} - \omega_{st_2} . \tag{5}$$

Für die Bemessung der Verzahnung ist die Wälzgeschwindigkeit bzw. -leistung maßgebend, bei diesem Planetengetriebe also nur ein Bruchteil der Antriebsleistung N_1. Daraus kann bereits gefolgert werden, daß seine Verzahnungen geringer beansprucht sind und sein Wirkungsgrad höher sein muß als der des Standgetriebes. Die Gleitbeanspruchung der Verzahnung wird also durch den umlaufenden Steg entlastet, da dieser einen Teil der Antriebsleistung durch Zahnkupplung bzw. -mitnahme überträgt.

Wird der Wirkungsgrad des Planetengetriebes mit η bezeichnet, so lautet die allgemeine Gleichung für seinen Reibungsverlust

$$N_V = N_1(1-\eta), \tag{6}$$

worin

$$N_1 = P_1 r_1 \omega_{12}$$

ist. Da beim Übergang des Planetengetriebes in das Standgetriebe sich die Verluste nicht verändert haben, können (4) und (6) gleichgesetzt und daraus für den Wirkungsgrad der Planetengetriebe I oder II folgende Gleichung gewonnen werden:

$$\eta = 1 - 2v\left(1 - \frac{1}{i}\right). \tag{7}$$

Bei Vertauschung von An- und Abtrieb, also bei treibendem Steg, läßt sich entsprechend errechnen

$$\eta = \frac{1-2v}{1-\frac{2v}{i}} . \tag{8}$$

In (7) und (8) ist

$$i = n_{\text{So. Rad}}/n_{\text{Steg}} = \text{Übersetzungsverhältnis.}$$

Es erweist sich hier als zweckmäßig, i immer als das Verhältnis der höheren zur kleineren Drehzahl auszudrücken, und zwar unabhängig von der Richtung des Kraftflusses. Da dieser dann nicht mehr aus dem Drehzahlverhältnis hervorgeht, wie es DIN 868 entspricht, wird jeweils besonders angegeben, ob vom Schnellen ins Langsame oder umgekehrt angetrieben wird.

Bei Gleichläufigkeit von An- und Abtrieb erhält i ein positives, bei Gegenläufigkeit ein negatives Vorzeichen. In (7) und (8) wie in allen folgenden Gleichungen ist i jedoch mit seinem Absolutwert einzusetzen, da der Drehsinn bereits berücksichtigt ist.

Die Antriebsrichtung ist hier praktisch ohne Einfluß auf den Wirkungsgrad, denn (7) und (8) ergeben etwa die gleichen Werte. Der Wirkungsgrad ist nur vom Verlustgrad des Standgetriebes und von der Übersetzung abhängig, und zwar fällt er bei konstantem v mit wachsendem i leicht ab, wie die voll ausgezogenen Kurven in Abb. 5 erkennen lassen.

4. Die vierräderigen Planetengetriebe III bis X. Für die gleichläufigen Getriebe III und IV gelten (7) und (8) und entsprechend die stark ausgezogenen Kurven der Abb. 5. Der Wirkungsgrad der gegenläufigen Getriebe V und VI ist ebenfalls nach diesen Gleichungen zu berechnen, wobei i lediglich negativ einzusetzen ist. Man erhält

$$\eta = 1 - 2v\left(1 + \frac{1}{i}\right), \tag{9}$$

$$\eta = \frac{(1-2v)}{1 + \frac{2v}{i}}, \tag{10}$$

Auch hier ist der Wirkungsgrad praktisch unabhängig von der Richtung des Leistungsflusses. Im Gegensatz zu den Getrieben I bis IV steigt aber η jetzt bei konstantem v mit zunehmender Übersetzung schwach an, wie die strichpunktierten Kurven in Abb. 5 zeigen. Man erkennt weiter, daß der Wirkungsgrad bei gleichem i und v etwas geringer ist als der der Gleichlaufgetriebe, während der entsprechende Standgetriebe-Wirkungsgrad zwischen beiden liegt. Für eine Übersetzung von $i=4$ und einen Verlustgrad von $v=2\%$ beispielsweise beträgt der Wirkungsgrad der Planeten-Gegenlaufgetriebe V und VI 95%, während das gegenläufige Standgetriebe unabhängig von der Übersetzung 96% und die gleichläufigen Planetengetriebe I bis IV sogar 97% aufweisen würden.

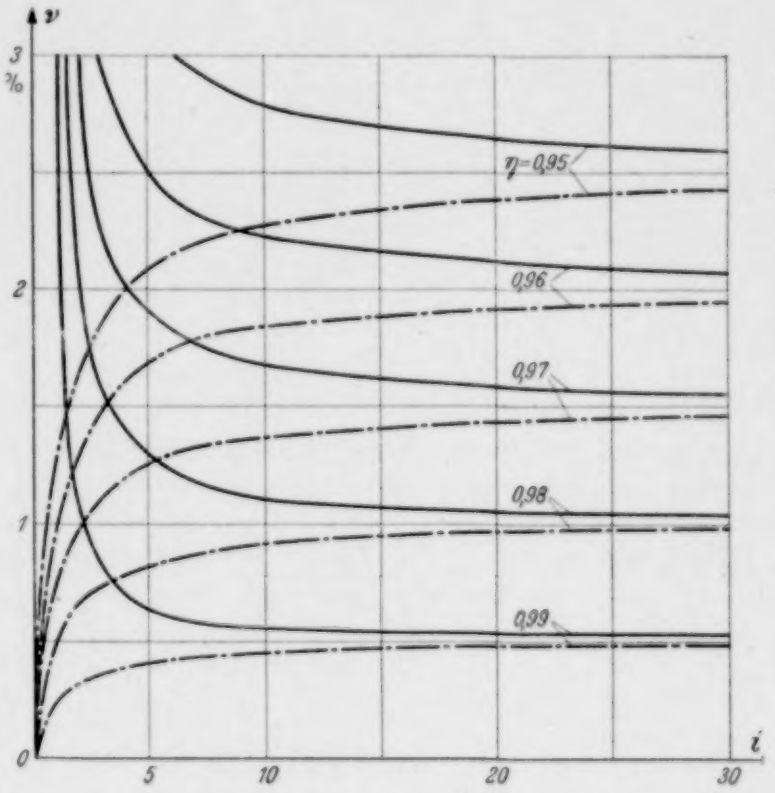


Abb. 5. Wirkungsgrad-Schaubild der Getriebe I bis VI.
——— Gleichläufige Getriebe I, II, III und IV,
—·—·— Gegenläufige Getriebe V und VI.

Die Getriebe IX und X stimmen in ihrem grundsätzlichen Aufbau mit den Getrieben V und VI überein. Jedoch dreht der Steg im ersten Fall schneller, im zweiten Fall langsamer als das Sonnenrad. Gemäß der Vereinbarung $i > 1$ lauten die Gleichungen für IX und X dann bei treibendem Sonnenrad

$$\eta = 1 - 2v(i+1) \tag{11}$$

und bei treibendem Steg

$$\eta = \frac{1-2v}{1+2iv}; \tag{12}$$

in beiden Fällen ist

$$i = n_{\text{Steg}}/n_{\text{So. Rad}} \text{ (hier immer größer als 1)}$$

Die Gleichungen (11) und (12) ergeben im gesamten i- und v-Bereich sehr geringe Wirkungsgrade, die mit wachsender Übersetzung stark abfallen, vgl. Kurvenscharen in der linken Hälfte von

Abb. 6. Aus ihr geht weiter hervor, daß der Wirkungsgrad nicht mehr unabhängig von der Antriebsrichtung im Getriebe ist, sondern bei treibendem Steg wesentlich höhere Werte aufweist als bei treibendem Sonnenrad. Im letzten Fall können die Getriebe für bestimmte Werte von i und ν sogar selbsthemmend werden[1]. Die Selbsthemmungsgrenze ist in dem Schaubild durch

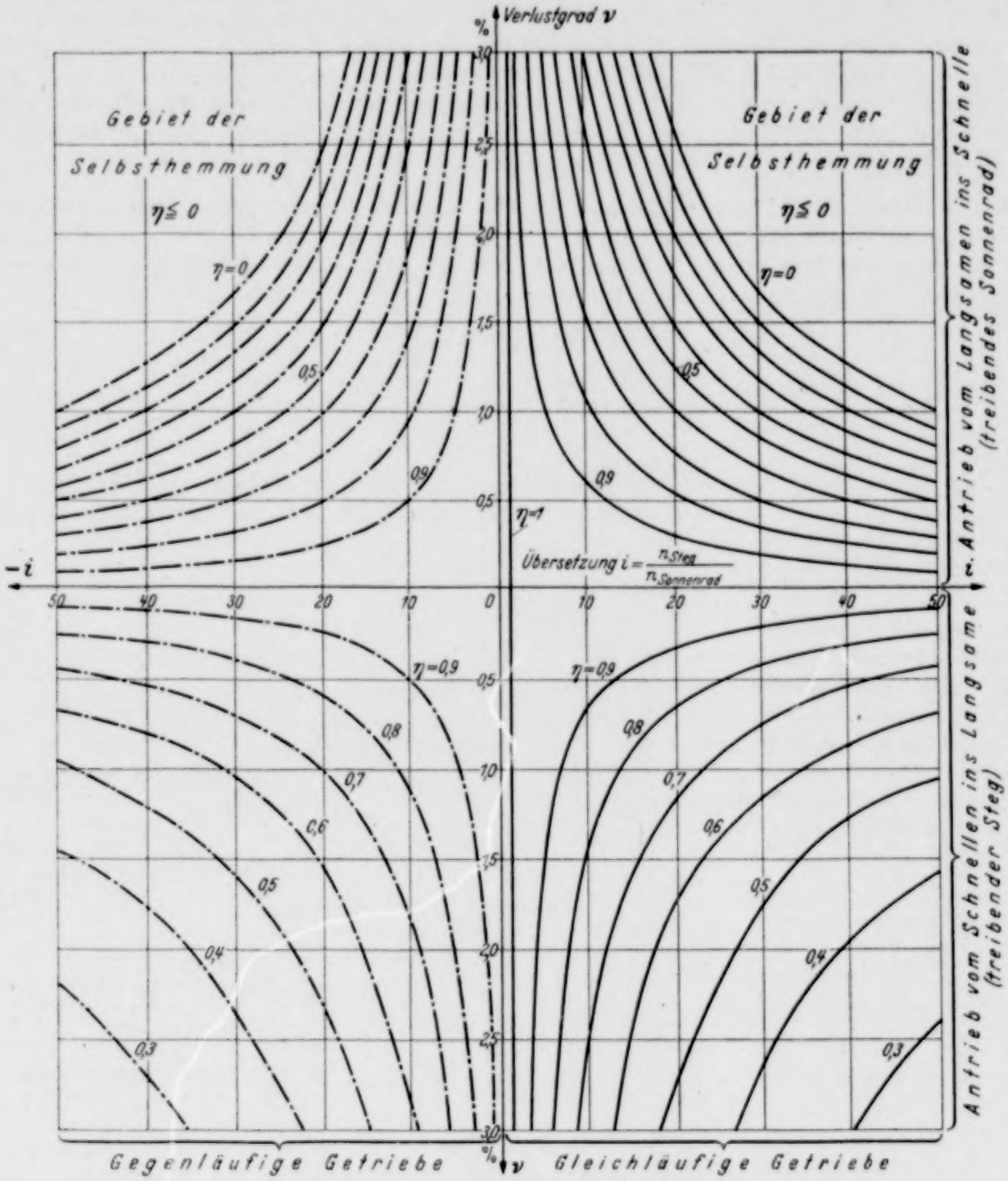


Abb. 6. Wirkungsgrad-Schaubild der Getriebe VII bis X.
——— Gleichläufige Getriebe VII und VIII.
—·—·— Gegenläufige Getriebe IX und X.

die Kurve $\eta=0$ gekennzeichnet. In der selbsthemmungsfreien Richtung (treibender Steg, also Antrieb vom Schnellen ins Langsame) beträgt der Wirkungsgrad dann etwa 50%.

Die Gleichlaufgetriebe VII und VIII entsprechen in ihrer Gleichung für den Wirkungsgrad grundsätzlich den Getrieben I bis IV, nur daß sie als Besonderheit entgegengesetzten Leistungsfluß aufweisen als diese. Es liegt hier der interessante Fall vor, daß trotz treibenden Rades 1 der Kraftfluß von Rad 2 auf Rad 1 ausgeübt wird, worauf bereits *Brandenberger*[2] hinwies. Da-

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 39.

[2] *H. Brandenberger*, Masch. Bau u. Betrieb 8 (1929), S. 249.

durch nimmt die Wälzleistung umgekehrt ab wie bisher, und man erhält bei treibendem Sonnenrad

$$\eta = \frac{1 - 2vi}{1 - 2v} \tag{13}$$

und bei treibendem Steg

$$\eta = \frac{1}{1 + 2v(i - 1)}. \tag{14}$$

Diese Werte sind in der rechten Hälfte der Abb. 6 aufgetragen worden. Der Kurvenverlauf entspricht grundsätzlich dem der Getriebe IX und X, nur ist der Wirkungsgrad unter gleichen Bedingungen etwas höher als bei diesen.

5. Zusammengesetzte Planetengetriebe. Die Zahl der möglichen Bauformen ist bei diesen Getrieben nahezu unbegrenzt. An dieser Stelle seien einige Getriebe behandelt, die zu zwei Hauptgruppen gezählt werden können.

Die Getriebe der einen Gruppe sind dadurch gekennzeichnet, daß sie einfach durch Hintereinanderschaltung einfacher Planetengetriebe gebildet werden. Durch Zusammenfassung verschiedener Glieder zu nur einem Glied entstehen dabei oft Bauformen, die diese Hintereinanderschaltung nicht mehr ohne weiteres erkennen lassen.

Das Kennzeichen der zweiten Gruppe besteht in einer inneren Leistungsverzweigung, die durch ein Ausgleichgetriebe, das als Teilgetriebe auftritt, hervorgerufen wird.

a) Hintereinanderschaltung von Getrieben. Der Wirkungsgrad eines durch Hintereinanderschaltung von Teilgetrieben gebildeten Getriebesatzes ist naturgemäß gleich dem Produkt der Teilwirkungsgrade. Die Hintereinanderschaltung der Getriebe I und VII würde beispielsweise den Gesamtwirkungsgrad

$$\eta = \eta_I \, \eta_{VII}$$

ergeben. Für η_I war (7) und für η_{VII} (13) gefunden worden. Die Multiplikation beider Gleichungen führt nach einigen Umrechnungen zu dem Ausdruck

$$\eta = \frac{i_I(1 - 2v) + 2v}{i_I(1 - 2v) + 2vi}. \tag{15}$$

Es bedeuten

η = Gesamtwirkungsgrad,
i_I = Teilübersetzung des Getriebes I,
i_{VII} = Teilübersetzung des Getriebes VII,
$i = i_I i_{VII}$ = Gesamtübersetzung,
v = Verlustgrad je Zahneingriff des Standgetriebes.

Über die Teilwirkungsgrade wurde ausgesagt, daß η_I mit zunehmender Übersetzung geringfügig abnimmt, während η_{VII} sehr stark heruntergeht. Der Gesamtwirkungsgrad wird also um so höher liegen, je größer die Teilübersetzung i_I gegenüber i_{VII} ist.

Bei sehr hoher Gesamtübersetzung wird an Stelle des Getriebes I besser das Getriebe III vorgeschaltet, weil mit diesem höhere Teilübersetzungen bis etwa 30 zu erzielen sind. Damit erhält man dann auch bei höchsten Übersetzungen noch einigermaßen gute Wirkungsgrade, bei $i = 1000$ und $v = 2{,}5\,\%$ z. B. 37 %, während das Getriebe VII allein hierbei nur etwa $\eta = 2\,\%$ erreichen würde.

Dieser Vergleich benachteiligt allerdings das Getriebe VII insofern, als sein Verlustgrad nach (1) weit unter dem hier angenommenen Wert $v = 2{,}5\,\%$ gehalten werden kann. Leider sind, wie schon erwähnt, über den Verlustgrad von reinen Innengetrieben geringen Zähnezahlunterschiedes bisher keine Ergebnisse veröffentlicht worden. Man hat daher so gut wie gar keine Anhaltspunkte darüber, mit welchen Wirkungsgraden man bei sehr hohen Übersetzungen, die diese Innengetriebe eben bei geringen Unterschieden in den Zähnezahlen (wobei die Übersetzung des betreffenden Standgetriebes nahe 1 liegen würde) zu erreichen gestatten, rechnen kann. Bei dem heutigen Stand der Schmier- und Fertigungstechnik darf man annehmen, daß beispielsweise die Übersetzung $i = 1000$ von dem Getriebe VII mit einem Wirkungsgrad von 60 bis 80 % verwirklicht werden kann, während das zusammengesetzte Getriebe dabei höchstens auf 50 bis 60 % kommen dürfte.

Nach diesen Betrachtungen erhebt sich die Frage, ob sich der konstruktive Mehraufwand gegenüber dem Getriebe VII überhaupt gelohnt hat. Dessenungeachtet ist aber das obige zusammengesetzte Getriebe in vereinfachter Form häufig angewendet worden. Die Vereinfachung

besteht darin, daß die beiden feststehenden Hohlräder sowie die damit eingreifenden Planetenräder zu je einem Rad zusammengefaßt werden. Auf diese Weise entsteht das in Abb. 1 mit XI bezeichnete Getriebe, das offenbar erstmals von *Wolfrom*[1] angegeben wurde. Abgesehen von konstruktiven Unterschieden stimmt dies Getriebe völlig mit dem obigen aus I und VII zusammengesetzten Getriebe überein. Der Wirkungsgrad beider Getriebe kann aus der Abb. 7 ermittelt werden. In dieser ist die Gesamtübersetzung i als Abszisse, das Verhältnis i_I/v als Ordinate und η als Parameter dargestellt worden, wobei die Gleichung (15) zugrunde zu legen ist. Die η-konst-Kurven werden dann mit großer Annäherung Geraden, und für gleiche Werte

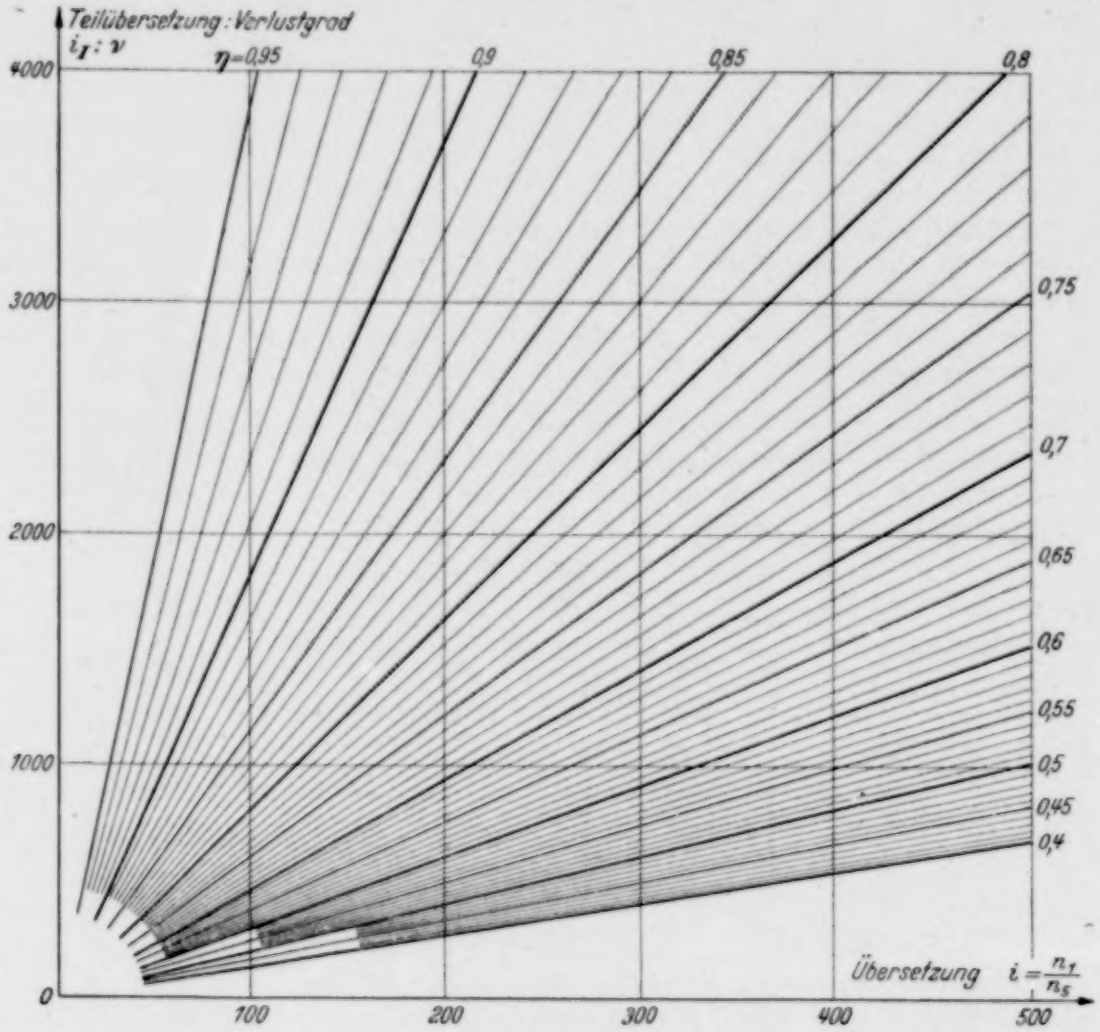


Abb. 7. Wirkungsgrad-Schaubild des Getriebes XI.

i_I/v erhält man mit genügender Genauigkeit denselben Wirkungsgrad. Für eine Gesamtübersetzung $i = 100$, eine Teilübersetzung $i_I = 6$ und einen Verlustgrad $v = 2{,}5\,\%$ läßt sich z. B. ein Wirkungsgrad von etwa 55 % ablesen. Durch Erhöhung der Teilübersetzung auf beispielsweise $i_I = 10$, die baulich durchaus tragbar ist, kann eine beachtliche Wirkungsgradsteigerung erzielt werden. Auf noch höhere Werte kommt man mit einem dreistufigen Planetenradsatz, d. h., wenn man an Stelle des Getriebes I das Getriebe III als Teilgetriebe verwendet. Bei tragbarem Außendurchmesser erreicht dies ohne weiteres eine Teilübersetzung von etwa 25, die zu einer Steigerung des Wirkungsgrades unter gleichen Bedingungen bis auf mindestens 80 % führen dürfte.

b) Planetengetriebe mit innerer Leistungsverzweigung. Diese Getriebe unterscheiden sich von den bisher behandelten einfachen Bauformen dadurch, daß deren festgestelltes Glied durch Zwischenschaltung einer Übersetzung vom Getriebe selbst bewegt wird. Von den zahlreichen Lösungsmöglichkeiten seien hier die in Abb. 1 schematisch dargestellten Getriebe XII bis XVII behandelt, die der Praxis entnommen sind.

Man erkennt, daß alle sechs Getriebe ein Ausgleichgetriebe mit den Gliedern 1, 2, 3, *st* sowie ein Übersetzungsgetriebe mit den Rädern 1′, 2′, 3′ (bzw. 1′, 2′, 3′, 4′ beim Getriebe XVII) enthalten. Die Übersetzung dieses Teilgetriebes ist im folgenden immer mit i' bezeichnet worden.

[1] *U. Wolfrom*, Werkstattstechnik 6 (1912), S. 615.

Um bei diesen Getrieben die Formel für den Wirkungsgrad aufstellen zu können, muß zunächst untersucht werden, in welcher Weise sich die Leistung in dem Ausgleichgetriebe verzweigt. Da diese Untersuchung aus Raummangel nicht für alle sechs Getriebe durchgeführt werden kann, sei nur die Leistungsverzweigung des Getriebes XII an Hand der Abb. 8 ermittelt und anschließend die η-Formel abgeleitet.

Unter der Annahme, daß die fest verbundenen Räder 1 und 1′ antreiben und der Steg *st* die Leistung abführt, muß vom Planetenrad 3 im Punkt *C* Leistung in den Steg abfließen. Allgemein gilt aber für ein Leistung abgebendes Glied, daß Kraft und Geschwindigkeit an ihm entgegengesetzte Richtung aufweisen, vgl. V_{3C} und P_{3C} in Abb. 8. Die gleich großen Umfangskräfte P_{3A} und P_{3B} halten der doppelt so großen Lagerkraft das Gleichgewicht, wirken also entgegengesetzt.

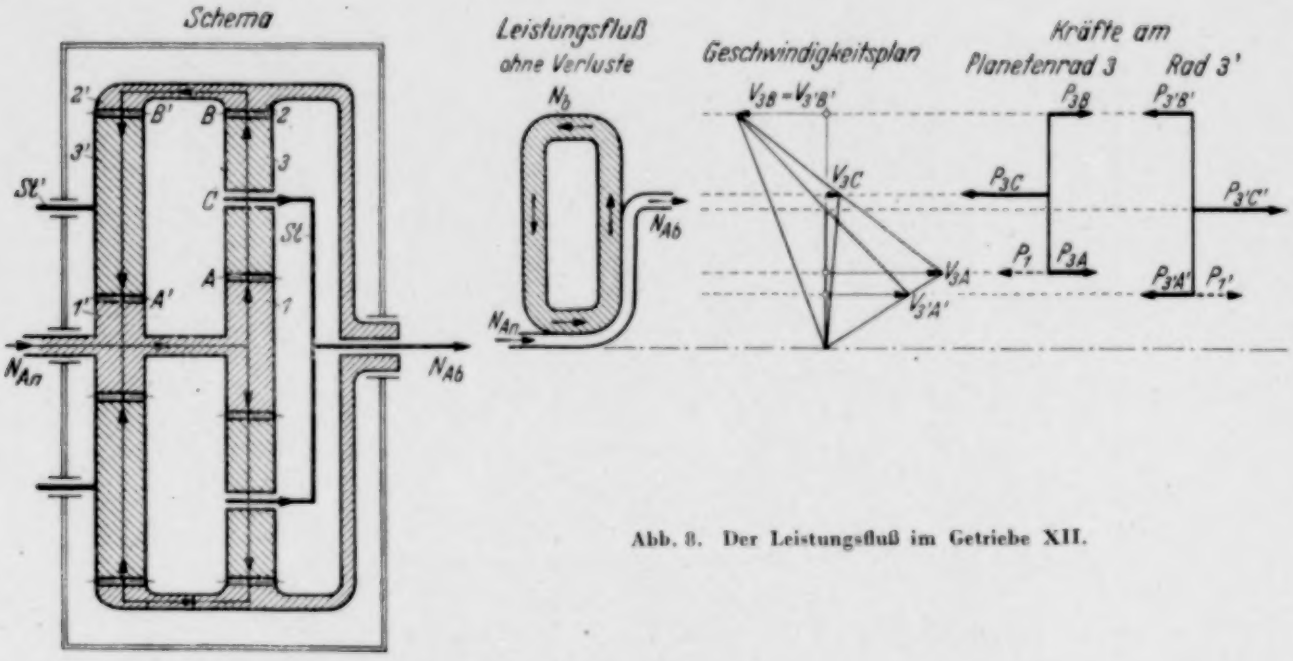


Abb. 8. Der Leistungsfluß im Getriebe XII.

Fährt man in dieser Weise fort, Kraft- und Geschwindigkeitsrichtung an den Rädern zu bestimmen, so kommt man zu folgendem Ergebnis. Dem Planetenrad fließt nur vom Sonnenrad 1 Leistung zu. Diese teilt sich in die beiden Leistungen N_{Ab} und N_2 auf. Die Teilleistung N_2 ist von außen nicht wahrnehmbar. Sie kreist innerhalb des Getriebes und sei mit „Blindleistung" bezeichnet, und zwar fließt sie in ihrem Kreislauf über die Räder 2′, 3′ und 1′ wieder in das Rad 3 zurück. Im Rad 1 vereinigt sie sich mit der Antriebsleistung. Die Leistungsverzweigung ist demnach durch folgende Gleichung gekennzeichnet:

$$N_1 = N_{Ab} + N_2 = N_{An} + N_1 \,. \tag{16}$$

Zur Ermittlung des Wirkungsgrades setzt man wieder die Zahnreibungsverluste gleich der Differenz der Wälzleistungen entsprechend dem Leistungsfluß

$$N_V = N_{An} - N_{Ab} = (N_{w1} - N_{w2}) + (N_{w2'} - N_{w1'}) \,.$$

Wird je Verzahnung wieder mit konstantem Wirkungsgrad η_v gerechnet, so gilt auch

$$N_{An} - N_{Ab} = (1 - \eta_v^2)\,(N_{w1} + N_{w2'}) \,.$$

Division durch N_{An} führt auf folgenden Ausdruck für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{N_{Ab}}{N_{An}} = 1 - (1 - \eta_v^2)\left(\frac{N_{w1}}{N_{An}} + \frac{N_{w2'}}{N_{An}}\right) . \tag{17}$$

Das erste Glied in der Klammer N_{w1}/N_{An} wird aus (16) gewonnen. Darin kann

$$N_{1'} = N_{w1'} = \eta_v^2 N_{w2'} = \eta_v^2 N_{2'} = \eta_v^2 N_2 \tag{18}$$

gesetzt werden, da das Teilgetriebe 1′ 2′ 3′ ein Standgetriebe ist und die Räder 2 und 2′ fest miteinander verbunden sind. Damit geht (16) in

$$N_1 = N_{An} + \eta_v^2 N_2 \tag{19}$$

über.

Werden die Umfangsleistungen N_1 und N_2 auf Grund der Beziehungen

$$N_1 = \frac{N_{w1}}{1 - \frac{1}{i}}, \tag{20}$$

$$N_2 = \frac{N_{w1}\eta_v^2}{1 + \frac{i'}{i}} \tag{21}$$

durch die Wälzleistungen ersetzt, so erhält man aus (19)

$$\frac{N_{w1}}{N_{An}} = \frac{\left(1 + \frac{i'}{i}\right)(i-1)}{i + i' - \eta_v^4 (i-1)}. \tag{22}$$

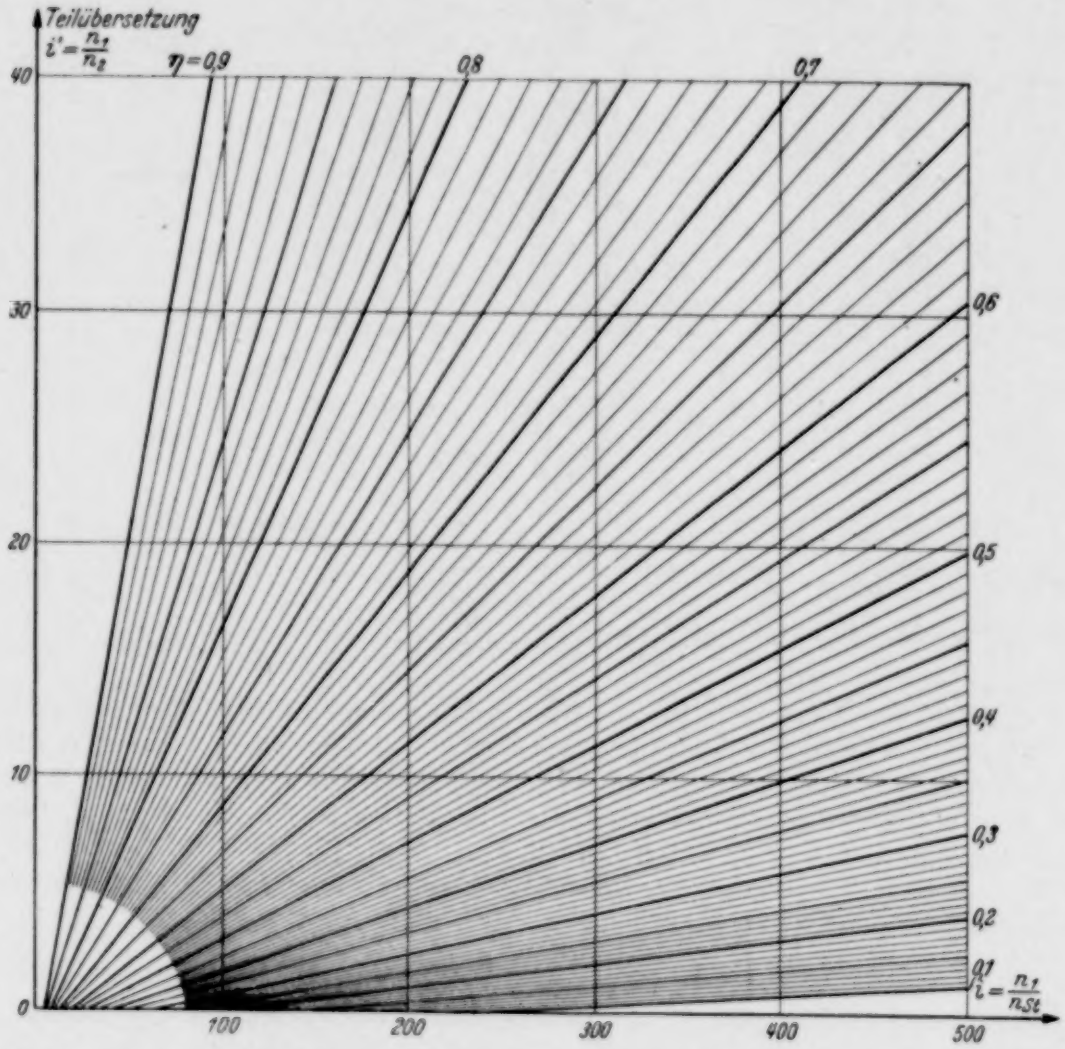


Abb. 9. Wirkungsgrad-Schaubild des Getriebes XII. Annahme: Verlustgrad je Verzahnung $v = 1\%$.

Darin bedeuten

$$i = \frac{n_1}{n_{st}}$$

und

$$i' = \frac{n_{1'}}{n_{2'}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Das zweite Klammerglied der Gleichung (17) $N_{w2'}/N_{An}$ folgt aus (18) und (21) und ergibt sich zu

$$\frac{N_{w2'}}{N_{An}} = \frac{\eta_v^2 (i-1)}{i + i' - \eta_v^4 (i-1)}. \tag{23}$$

Führt man (22) und (23) in (17) ein und setzt näherungsweise

$$\eta_v^2 = (1-v)^2 \approx 1 - 2v,$$
$$\eta_v^4 = (1-v)^4 \approx 1 - 4v,$$

so erhält man die gesuchte Beziehung für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{i' + 1 - 2v\,i'\left(1 - \frac{1}{i}\right)}{i' + 1 + 4v\,(i-1)}\,. \tag{24}$$

Diese Gleichung ist in Abb. 9 für einen Verlustgrad $v = 1\,\%$ zur Darstellung gebracht worden. Wie man sieht, weisen auch hier die η-Kurven linearen Verlauf auf, wenn als Abszisse die Teilübersetzung i' und als Ordinate die Gesamtübersetzung i gewählt werden. Ein Vergleich mit Abb. 7 zeigt, daß das Getriebe XII nur wesentlich geringere Wirkungsgrade zu verwirklichen gestattet als das Getriebe XI, wenn gleiche Bedingungen zugrunde gelegt werden. Eine weitere Überlegenheit des Getriebes XI gegenüber dem erstgenannten besteht in dem erheblich geringeren Bauaufwand. Die praktische Anwendung des Getriebes XII, auf das *Eichelkraut* im Jahre 1913 das Patent DRP. 266635 erteilt wurde, kann daher nicht empfohlen werden.

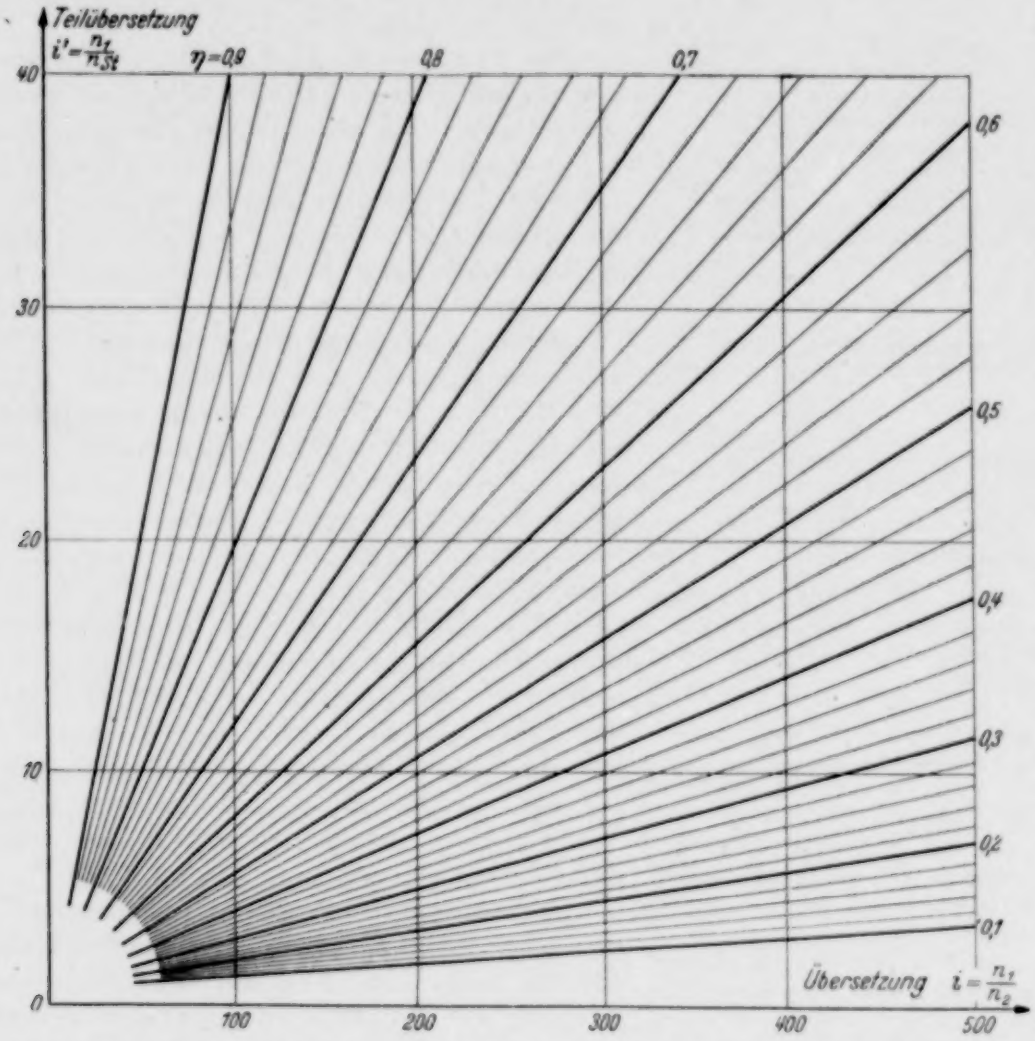


Abb. 10. Wirkungsgrad-Schaubild des Getriebes XVII. Annahme: Verlustgrad je Verzahnung $v = 1\,\%$.

Zu der Gruppe der hochübersetzenden, jedoch sehr unwirtschaftlich arbeitenden Getriebe ist auch das Getriebe XVII zu zählen, das nach *Arlt*[1] als Aufzuggetriebe verwendet worden ist. Die Ableitung der Beziehung für den Wirkungsgrad, die entsprechend den obigen Ausführungen zu erfolgen hat, wurde an anderer Stelle durchgeführt[2]. Von ihrer Wiedergabe sei deshalb hier abgesehen und nur kurz Abb. 10 besprochen, in der sie dargestellt ist.

Man erkennt, daß der Wirkungsgrad dieses Getriebes noch unter dem des Getriebes XII liegt. Die Ursache ist auch hier die außergewöhnlich hohe Blindleistung, von der das Getriebe durchflossen wird, das somit als sehr ungünstig zu beurteilen ist. Folgendes Zahlenbeispiel bestätigt dies Werturteil. Bei einer Übersetzung $i = 200$ und einem Verlustgrad $v = 1\,\%$ erreicht das Ge-

[1] *W. Arlt*, Zusammenhänge und Gesetze der Drehzahlverhältnisse ebener Räderwerke. Mitt. des Verbd. Alter Herren d. Staatl. Akademie für Technik, Chemnitz, 1936.

[2] Siehe Fußnote 2 von Seite 39.

triebe XI einen Wirkungsgrad von rund 70 %, das Getriebe XII etwa 57 % und das Getriebe XVII nur 48 %. Zusammenfassend können die drei Getriebe dahingehend beurteilt werden, daß sie zwar bei verhältnismäßig kleinem Außendurchmesser und geringer Anzahl von Rädern höchste Übersetzungen ermöglichen, daß ihr Wirkungsgrad dabei jedoch meist untragbar niedrig ist. Allenfalls kann er noch beim Getriebe XI in zulässigen Grenzen gehalten werden, während die beiden anderen Getriebe so unwirtschaftlich arbeiten, daß von ihrer Anwendung abgeraten werden muß.

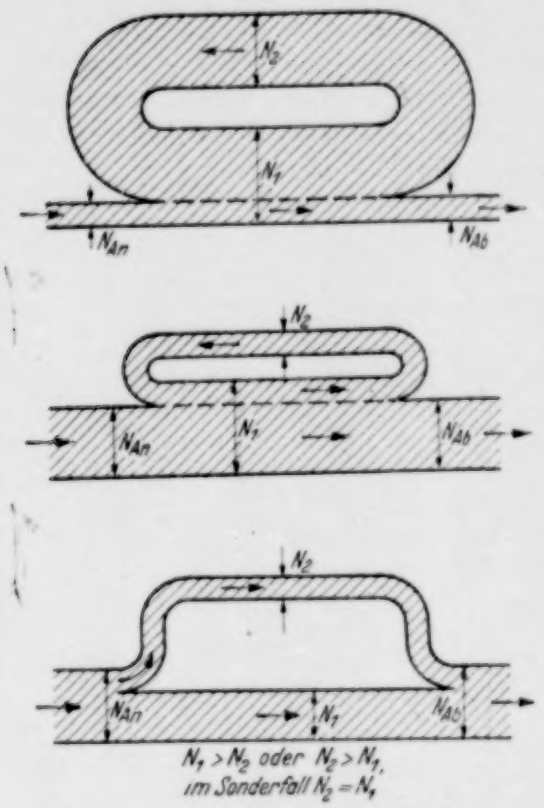


Abb. 11. Die drei Möglichkeiten einer Leistungsverzweigung innerhalb von Getrieben, die als Teilgetriebe ein Ausgleichgetriebe enthalten. Verluste sind nicht berücksichtigt.

Oberes Bild:
Getriebe XII und XVII: $N_1 = N_{Ab} + N_2$. Blindleistung N_2 ein Vielfaches der übertragenen Leistung N_{An} bzw. N_{Ab}. Ungünstige Verzweigung!

Mittleres Bild:
Getriebe XIII und XVI: $N_1 = N_{Ab} + N_2$. Blindleistung ein Bruchteil der übertragenen Leistung. Brauchbare Verzweigung!

Unteres Bild:
Getriebe XIV und XV: $N_{Ab} = N_1 + N_2$. Keine Blindleistung vorhanden. Ideale Verzweigung!

Die Getriebe XIII bis XVI erreichen durchweg sehr günstige Wirkungsgrade. Unter normalen Betriebsbedingungen können sie im ganzen Übersetzungsbereich leicht über 90 % gehalten werden. Man kommt mit diesen Getrieben allerdings nicht auf so hohe Übersetzungen wie mit den drei obigen Getrieben. Die obere Grenze dürfte etwa bei $i = 600$ liegen, wenn zweistufige Zwischenräder angeordnet werden.

Alle vier Getriebe sind mit unerheblichen Abweichungen zur praktischen Anwendung gekommen. Das Getriebe XIII findet man als Rückwärtsgang in dem bekannten Kraftwagen-Wechselgetriebe von *Wilson*[1]. Die Firma Demag baute früher in ihre Elektrozüge Getriebe ein, die grundsätzlich dem Typ XIV entsprechen[2]. Die Albatros-Werke haben in ihrem Boco-Flaschenzug das Getriebe XV mit einer Übersetzung $i = 86{,}5$ verwendet.

Die Untersuchung dieser Getriebe auf Leistungsverzweigung führt zu dem Ergebnis, daß in XIII und XVI eine Blindleistung auftritt. Sie ist hier jedoch nur immer ein Bruchteil der nach außen übertragenen Leistung, während sie bei den Getrieben XII und XVII ein Vielfaches derselben betrug. Eine derart geringe Blindleistung ist durchaus tragbar, und die Getriebe sind in jedem Fall verwendbar.

Die Getriebe XIV und XV sind blindleistungsfrei. Bei ihnen teilt sich die zugeführte Leistung in zwei Zweige, die sich im Abtriebsglied wieder vereinigen. Durch die einzelnen Verzahnungen fließt nur ein Bruchteil der Antriebsleistung. Die Verzahnungen werden also geringer beansprucht als bei einem gewöhnlichen Getriebe, dessen Verzahnungen nacheinander von der Gesamtleistung durchflossen werden.

Nach obigem kann man also bei einer Leistungsverzweigung in einem Planetengetriebe drei Fälle unterscheiden, die in der Abb. 11 veranschaulicht wurden. Sie gelten grundsätzlich für alle Planetengetriebe mit mehreren Leistungszweigen, worauf bereits *v. Thüngen*[3] hingewiesen hat.

Der Wirkungsgrad der obigen vier Getriebe ist praktisch unabhängig von der Teilübersetzung i' im Teilgetriebe $1'\,2'\,3'$. Auch die Gesamtübersetzung i hat nur im unteren Bereich merkbaren Einfluß. Ab $i > 10$ kann der Wirkungsgrad als konstant gelten, und bei Werten $i > 20$ ist er für alle Getriebe annähernd gleich groß. Er ist dann nur noch von der Größe des Verlustgrades v abhängig. Aus diesen Gründen sind Schaubilder der bisherigen Art hier nicht angebracht, und man kann sich damit begnügen, den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von der Übersetzung bei verschiedenen v-Werten darzustellen. In Abb. 12 sind derartige Kurven aufgetragen worden, wobei der Verlustgrad zu 1 % gewählt wurde. Um einen Vergleich mit den vorher behandelten Getrieben zu ermöglichen, sind in dieser Abbildung auch für sie die entsprechenden Kurven wiedergegeben. Die Diskussion dieser Kurven und die Bewertung der einzelnen Getriebe wird im folgenden Abschnitt vorgenommen.

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 41.
[2] Siehe Fußnote 1 von S. 40 und Fußnote 2 von S. 44.
[3] Siehe Fußnote 2 von S. 41.

6. Bewertung aller Getriebe. Den höchsten Wirkungsgrad weisen nach Abb. 12 die Getriebe I, II, III und IV mit gleichem Drehsinn von An- und Abtrieb auf. Sie übertreffen die entsprechenden Standgetriebe um ein geringes, für die die Gerade $\eta = 0{,}98$ gilt. Die gemeinsame Kurve der vier Planetengetriebe liegt etwas oberhalb dieser Geraden und fällt mit steigender Übersetzung sanft ab, wobei die Gerade die waagerechte Asymptote darstellt.

Die Wirkungsgrad-Kurve der gegenläufigen Planetengetriebe V und VI, bei denen der Steg langsamer umläuft als das Sonnenrad, nähert sich der genannten Geraden asymptotisch von unten. Hier steigt also der Wirkungsgrad mit wachsender Übersetzung allmählich an.

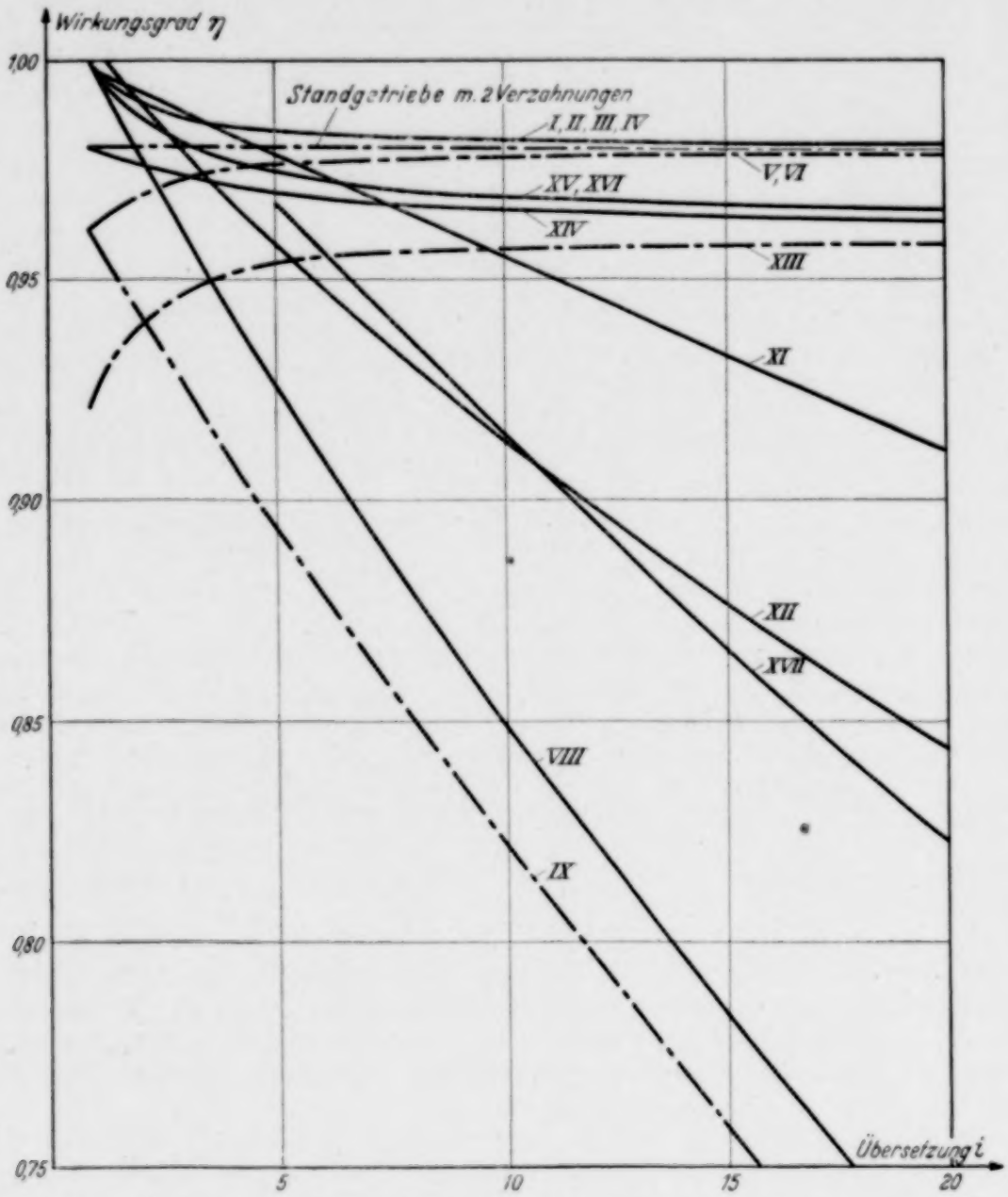


Abb. 12. Wirkungsgrad aller behandelten Getriebe in Abhängigkeit von der Übersetzung bei einem Verlustgrad je Verzahnung von $\nu = 1\,\% = \text{const}$.
——— Gleichläufige Getriebe. —·—·— Gegenläufige Getriebe.

Wählt man bei diesen beiden Getrieben die Zähnezahlen derart, daß der Steg schneller dreht als das Sonnenrad, erhält man sehr geringe Wirkungsgrade, wie die Kurven VIII und IX erkennen lassen. Dabei liegt die Kurve des gegenläufigen Getriebes IX unter der des Gleichlaufgetriebes VIII.

Die Hohlradgetriebe VII und X sind in Abb. 12 nicht aufgenommen worden, da ihr Verlustgrad bei geringem Zähnezahlunterschied der eingreifenden Räder wesentlich kleiner als 1% gehalten werden kann, vgl. Gleichung (1). Mangels entsprechender Versuchsergebnisse können darüber jedoch keine zuverlässigen Zahlenangaben gemacht werden. Nur bei größeren Zähnezahlunterschieden nähern sich die η-Kurven denen der Außengetriebe VIII und IX an. Als Anhaltspunkt kann dafür etwa gelten, daß die Planetenrad-Zähnezahl mindestens unterhalb

der halben Hohlrad-Zähnezahl liegen muß, so daß mehrere Planetenradpaare auf dem Umfang angeordnet werden können.

Im Übersetzungsbereich bis etwa $i=30$ muß von der Anwendung der Getriebe VII bis X abgeraten werden. Die Getriebe I bis IV sind wegen geringeren Bauaufwands und höheren Wirkungsgrades dabei viel günstiger. Dies wird jedoch anders bei hohen Übersetzungen. Wegen zu großen Außendurchmessers sind den letzteren hier obere Grenzen bis etwa $i=30$ gesetzt (Getriebe IV), während die Getriebe VII bis X bis zu höchsten i-Werten mit sehr kleinem Außendurchmesser bauen. Dies gilt besonders für die Innengetriebe VII und X, die bis zu Übersetzungen $i=30000$ ausgeführt worden sind[1]. Derart hohe i-Werte sind nur möglich, wenn Planetenrad und Hohlrad um ein bis zwei Zähne voneinander abweichen[2], was sich auf die Zahnreibungsverluste sehr günstig auswirkt und zur Folge hat, daß der Wirkungsgrad selbst bei diesen außergewöhnlich hohen Übersetzungen nach (1) in tragbaren Grenzen gehalten werden kann.

Die Außengetriebe VIII und IX sind normalerweise nicht für so hohe Übersetzungen geeignet, jedoch sind durch besondere Verzahnungen auch hier Übersetzungen bis ungefähr $i=1000$ bei tragbarem Außendurchmesser erreicht worden[3]. Da hierbei aber immer ungünstigere Zahneingriffsverhältnisse vorliegen als bei Innenverzahnungen, ist auch der Wirkungsgrad geringer. Er dürfte bei $i=1000$ z. B. auch bei bester Ausführung der Verzahnung und günstigsten Schmierbedingungen nicht weit über 10% gebracht werden können.

Das Getriebe XI ist aus den Getriebe I und VII zusammengesetzt und für sehr hohe Übersetzungen geeignet. Es liegt mit seinem Wirkungsgrad, wie die Kurve XI deutlich zeigt, wesentlich günstiger als die Getriebe VII bis X.

Auch die Getriebe XII und XVII weisen bei höchsten Übersetzungen nur geringen Durchmesser auf. Die Kurven in Abb. 12 lassen jedoch ihren schlechten Wirkungsgrad erkennen, weshalb ihre praktische Anwendung abzulehnen ist.

Bemerkenswert ist der hohe Wirkungsgrad der vier letzten Getriebe XIII bis XVI. Wie die Kurven zeigen, liegt er durchweg bei allen Getrieben oberhalb 95%. Entsprechend der steigenden Kurvencharakteristik weist allerdings das Getriebe XIII bei kleineren Übersetzungen einen schlechteren Wirkungsgrad auf, bleibt aber immer noch über 90%. Die Kurven der übrigen Getriebe fallen mit steigender Übersetzung allmählich ab. Die gemeinsame Asymptote aller vier Getriebe ist die Gerade $\eta=96\%$. Dies ist der Wirkungsgrad, den ein entsprechendes Standgetriebe mit ebenfalls sechs Rädern und vier Verzahnungen aufweisen würde, und zwar unabhängig von der Übersetzung.

7. Zusammenfassung. Es werden Rechenverfahren und Diagramme entwickelt, die beim Entwurf von Zahnrad-Planetengetrieben zur überschlägigen Ermittlung ihres voraussichtlichen Wirkungsgrades dienen können. Dabei werden insgesamt 17 Planetengetriebe behandelt, die im Maschinenbau verbreitet Anwendung gefunden haben.

Allgemein ist aus den Ergebnissen zu schließen, daß die Zahnreibungsverluste bei den einzelnen Getrieben selbst unter Annahme gleicher Bedingungen, wie Bearbeitung der Zähne, Schmierung usw., sehr verschieden groß und insbesondere stark von der Übersetzung abhängig sein können, wie man es in diesem Ausmaß von den normalen nicht umlaufenden Standgetrieben nicht gewohnt ist. Diese sind bestimmten Bauformen von Planetengetrieben im Wirkungsgrad etwas unterlegen, anderen wiederum weit überlegen.

Hochübersetzende, raumsparende Planetengetriebe sind gewöhnlich in ihrem Wirkungsgrad gefährdet. Durch Verwendung von Innenverzahnungen geringer Zähnezahldifferenz von Hohl- und Planetenrad kann der Wirkungsgrad aber auch bei sehr hohen Übersetzungen in erträglichen Grenzen gehalten werden.

Bei zusammengesetzten Getrieben hängt der Wirkungsgrad unter Umständen stark davon ab, in welchem Verhältnis man die Gesamtübersetzung auf die einzelnen Teilgetriebe aufteilt.

Abschließend lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit dahingehend beurteilen, daß sie zwar nicht Versuchsergebnisse ersetzen, wohl aber eine Übersicht darüber geben können, welche Wirkungsgrade bei den einzelnen Bauformen von Planetengetrieben im Höchstfall erwartet werden dürfen.

[1] Gebaut von der Masch.-Fabrik Acbar A.G., Zürich, und der Firma Prometheus, Berlin-Reinickendorf.
[2] Nur bei Sonderverzahnungen möglich.
[3] Siemens & Halske nach DRP. 584484.

(Eingegangen am 15. Januar 1949.)
Anschrift des Verfassers: Dr. *Reemt Poppinga*, (20a) Wolfsburg, Goethestraße 49.

Zur Berechnung der Poinsotbewegung.

Von **R. Grammel.**

1. Einleitung. Das Verhalten des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels (d. h. eines beliebig gestalteten Körpers, der in seinem Schwerpunkt gestützt wird und außer der Schwerkraft und dem ihr entgegengesetzt gleichen Stützdruck keinen weiteren Kräften ausgesetzt ist) kann vollkommen anschaulich mit dem Bild der *Poinsot*bewegung beschrieben werden: Abrollen des körperfesten (zum Trägheitsellipsoid des Stützpunkts ähnlichen) *Poinsot*ellipsoides bei festem Mittelpunkt (Stützpunkt) auf der invariablen Ebene, die auf dem raumfesten Vektor des Drehimpulses (Schwungs, Dralls) senkrecht steht[1]. So klar dieses Bild den räumlichen Ablauf der Bewegung wiedergibt, sein zeitlicher Verlauf ist damit keineswegs veranschaulicht, und auch die Vorrichtungen, die *Poinsot*, *Sylvester*, *Boltzmann* und andere erdacht haben, um die Drehgeschwindigkeit richtig darzustellen, sind nicht hinreichend durchsichtig.

Der formelmäßige Ausdruck der *Poinsot*bewegung spiegelt diese Schwierigkeit ebenfalls wieder. Die bekannte *Kirchhoff*sche Lösung des Problems vermag zwar die Drehkomponenten im körperfesten Hauptachsenkreuz sowie zwei von den drei *Euler*schen Lagewinkeln durch die *Jacobi*schen elliptischen Funktionen sn, cn und dn in der Zeit t auszudrücken; der dritte *Euler*sche Winkel erscheint aber als Integral, dessen Auswertung[2] bis jetzt nicht befriedigt. Die elegante Darstellung der *Klein-Caley*schen Bewegungsparameter durch Thetafunktionen hat hauptsächlich zum Ziele, die räumliche Gestalt der Bahnen der Kreiselpunkte zu finden sowie die Pol- und Spurbahnen, die der Berührpunkt des *Poinsot*ellipsoids auf ihm selbst und auf der invariablen Ebene beim Abrollen beschreibt[3].

Nun ist aber die *Poinsot*bewegung doch die unmittelbare Verallgemeinerung der sogenannten regulären Präzession, die der symmetrische kräftefreie Kreisel als allgemeinste Bewegung vollzieht. Wie diese, so kann auch jene gedeutet werden als Überlagerung einer Eigendrehung und einer Präzessionsdrehung, nur mit dem Unterschied, daß beim unsymmetrischen Kreisel beide im allgemeinen (d. h. abgesehen von den permanenten Drehungen um die Hauptachsen) nicht mehr gleichförmig sind, sondern um bestimmte Mittelwerte mit der gleichen zeitlichen Periode schwanken, mit der dies auch der Winkel zwischen der raumfesten Präzessionsachse und der körperfesten Eigendrehachse (längste oder kürzeste Hauptachse des *Poinsot*ellipsoids) tut.

Das Ziel der folgenden Überlegung ist, dies in Formeln zu fassen, d. h. die Mittelwerte der drei Bewegungskomponenten anzugeben sowie die *Fourier*reihen ihrer Schwankungen.

Wir werden uns dabei einer Näherungsrechnung bedienen, die jedoch für einen großen Teil des Bereiches aller *Poinsot*bewegungen keinen allzu großen Fehler aufweist und wenigstens für den vorliegenden Zweck als ausreichend genau angesehen werden kann.

2. Die Drehkomponenten und die Eulerschen Winkel. Zur Vorbereitung müssen wir zuerst die Grundformeln der *Kirchhoff*schen Lösung zusammenstellen. Es sei ein körperfestes, rechtshändiges Achsenkreuz (x, y, z) zugrunde gelegt, das mit dem Hauptachsenkreuz des Schwerpunkts zusammenfällt. In ihm seien $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ die Komponenten des Drehvektors und A, B, C die zugehörigen Drehmassen (Hauptträgheitsmomente), für die die Rangordnung

$$A > B > C \quad \text{oder} \quad A < B < C \tag{1}$$

gelte. Dann lauten die *Euler*schen Bewegungsgleichungen

$$A \frac{d\omega_x}{dt} = (B-C)\omega_y \omega_z \tag{2}$$

---

[1] *L. Poinsot*, Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834.

[2] Die Formel von *E. T. Whittaker*, Analytische Dynamik, S. 160, Berlin 1924, zeigt in der Form

$$e^{2i\varphi} = g(t)\, e^{2i\omega t},$$

wo $g(t)$ eine periodische komplexe Funktion ist, daß ω noch nicht die „mittlere" Präzessionsgeschwindigkeit sein kann. Außerdem liefert die Spezialisierung auf den symmetrischen Kreisel ein unrichtiges Ergebnis.

[3] *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, S. 454, Leipzig 1897/1910.

und zyklisch weiter. Ihre Lösungen sind

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \alpha \,\mathrm{dn}\,\sigma t,\\ \omega_y &= \beta \,\mathrm{sn}\,\sigma t,\\ \omega_z &= \gamma \,\mathrm{cn}\,\sigma t.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um die Konstanten α, β, γ, σ sowie den Modul k der elliptischen Funktionen dn, sn und cn zu bestimmen, denken wir uns den Kreisel zur Zeit $t=0$ mit einem Drehstoß angetrieben, dessen Achse in der (x, z)-Ebene liegt und dort die Drehkomponenten ω_{x0} und ω_{z0} erzeugt, wogegen $\omega_{y0}=0$ ist. (Daß diese Inbetriebsetzung des Kreisels die Allgemeinheit seiner Bewegung in keiner Weise einschränkt, ist aus dem *Poinsot*schen Bild bekannt.) Dann ist

$$\alpha=\omega_{x0}\,, \quad \gamma=\omega_{z0}\,, \tag{4}$$

und die Lösungen (3), in (2) eingesetzt, liefern die drei Gleichungen

$$-A\omega_{x0}\sigma k^2=(B-C)\beta\omega_{z0}\,, \tag{5}$$

$$B\beta\sigma=(C-A)\omega_{x0}\omega_{z0}\,, \tag{6}$$

$$-C\omega_{z0}\sigma=(A-B)\beta\omega_{x0} \tag{7}$$

zur Bestimmung von β, σ und k^2. Multiplikation und Division von (6) und (7) gibt

$$\sigma^2=\frac{(A-B)(A-C)}{BC}\,\omega_{x0}^2, \tag{8}$$

$$\beta^2=\frac{C(A-C)}{B(A-B)}\,\omega_{z0}^2. \tag{9}$$

Division von (5) und (6) endlich gibt wegen (9)

$$k^2=\frac{C(B-C)}{A(A-B)}\,\frac{\omega_{z0}^2}{\omega_{x0}^2}\,. \tag{10}$$

Zufolge (1) sind σ, β und k sicher reell; auf die einfache Diskussion ihrer Vorzeichen brauchen wir hier nicht näher einzugehen, da dies für das Folgende belanglos ist, ebensowenig auf den bekannten Beweis dafür, daß man je nach der Rangordnung (1) die Bezeichnung der x- und z-Achse stets so einrichten kann, daß $0\leqq k^2\leqq 1$ wird. Die untere Grenze $k^2=0$ bedeutet hier den symmetrischen Kreisel $(B=C)$, die obere $k^2=1$ den Sonderfall der trennenden Polbahn, der uns hier nicht beschäftigt, da die zugehörige sogenannte asymptotische Bewegung in jeder Hinsicht bekannt ist.

Die raumfeste Richtung des Drehimpulsvektors $\mathfrak{D}$ und sein unveränderlicher Betrag D sind durch seine beiden Anfangskomponenten $A\omega_{x0}$ und $C\omega_{z0}$ festgelegt. Von ihm aus definieren wir die drei *Euler*schen Winkel δ, φ und ψ folgendermaßen: δ sei der (als spitz voraussetzbare) Winkel zwischen dem Vektor $\mathfrak{D}$ und der positiven x-Achse, φ der Drehwinkel des Kreisels für seine Drehung um die x-Achse, betrachtet von einem Beobachter, der die Drehung der Ebene $(+x, \mathfrak{D})$ um die Achse $\mathfrak{D}$ mitmacht; diese letzte Drehung werde durch den Winkel ψ gemessen. Zur Zeit $t=0$ sei der Winkel $\varphi=0$ für die positive y- und z-Achse; ebenso nehmen wir in diesem Augenblick den Drehwinkel $\psi=0$ für die $(+x, \mathfrak{D})$-Ebene.

Mit diesen Festsetzungen werden die drei Komponenten des Drehimpulses

$$\left.\begin{aligned}A\omega_x &= D\cos\delta,\\ B\omega_y &= D\sin\delta\sin\varphi,\\ C\omega_z &= D\sin\delta\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Aus (11) folgt mit (3), (4) und (9)

$$\cos\delta=\frac{A\,\omega_{x0}}{D}\,\mathrm{dn}\,\sigma t, \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\sqrt{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,\sigma t}{\mathrm{cn}\,\sigma t} \tag{13}$$

mit der positiven Abkürzung

$$l=\frac{B(A-C)}{C(A-B)}\,. \tag{14}$$

Endlich projizieren wir die Drehkomponenten noch orthogonal auf diejenige Achse in der (y,z)-Ebene, die auf ihrer Schnittgeraden mit der Ebene $(+x, \mathfrak{D})$ liegt und mit $\mathfrak{D}$ den Winkel $\frac{\pi}{2}-\delta$ bildet. Da weder ω_x noch $d\delta/dt$ und $d\varphi/dt$ solche Projektionen liefern, ist

$$\frac{d\psi}{dt}\sin\delta = \omega_y \sin\varphi + \omega_z \cos\varphi$$

oder wegen (11)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{D}{B}\sin^2\varphi + \frac{D}{C}\cos^2\varphi\,, \tag{15}$$

wenn wir den trivialen Fall $\sin\delta = 0$ der permanenten Drehung um die x-Achse ausschließen.

An diese längst bekannten Formeln knüpfen wir an, wenn wir jetzt die „Eigendrehung" φ und die „Präzessionsdrehung" ψ — wie wir beide auch bei der *Poinsot*bewegung nennen mögen — anschaulicher als bisher darstellen, insbesondere in ihre Mittelwerte und ihre Schwankungen zerlegen wollen, um einen tieferen Einblick in diese Bewegungskomponenten zu bekommen.

3. Die Eigendrehung der Poinsotbewegung. Wir erinnern uns an den aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten Zusammenhang der Funktionen sn und cn mit den Thetafunktionen ϑ_1 und ϑ_2

$$\frac{\mathrm{sn}\,\sigma t}{\mathrm{cn}\,\sigma t} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\frac{\vartheta_1(\sigma t)}{\vartheta_2(\sigma t)} \qquad (k' = \sqrt{1-k^2}\,). \tag{16}$$

wobei für die Thetafunktionen die Reihenentwicklungen gelten

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1(\sigma t) &= 2\left(q^{1/4}\sin\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} - q^{9/4}\sin 3\,\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} + q^{25/4}\sin 5\,\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} - + \ldots\right),\\ \vartheta_2(\sigma t) &= 2\left(q^{1/4}\cos\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} + q^{9/4}\cos 3\,\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} + q^{25/4}\cos 5\,\frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}} + \ldots\right);\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

hierbei ist

$$q = e^{-\frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}\pi}\,, \tag{18}$$

und K sowie K' sind die vollständigen elliptischen Normalintegrale erster Gattung für die Moduln k und $k' = \sqrt{1-k^2}$, die man mit dem Wert k (10) aus den Tafeln[1] entnehmen kann. Nach (13), (16) und (17) wird also

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{l}{k'}}\,\frac{\sin s - q^2\sin 3\,s + q^6\sin 5\,s - + \ldots}{\cos s + q^2\cos 3\,s + q^6\cos 5\,s + \ldots} \qquad \left(s = \frac{\pi\sigma t}{2\,\mathsf{K}}\right). \tag{19}$$

Man erhält offenbar einen sehr viel handlicheren Ausdruck, wenn man im Zähler und Nenner die Reihen schon nach dem ersten Glied abbricht und also genähert

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{l}{k'}}\,\mathrm{tg}\,s \tag{20}$$

setzt. Eine Abschätzung des dabei begangenen Fehlers zeigt die folgende Tabelle, in welcher $k = \sin\Theta$ ist. Wir wollen diesen Fehler zunächst einfach einmal in Kauf nehmen, kommen aber später noch auf ihn zurück.

Θ	q^2	Fehler $<$
5°	$2{,}34\cdot10^{-7}$	$5\cdot10^{-7}$
10°	$3{,}69\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-5}$
20°	$6{,}08\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-4}$
30°	$3{,}21\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-3}$
40°	$1{,}12\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$
50°	$3{,}02\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-2}$
60°	$7{,}40\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-2}$
70°	$1{,}72\cdot10^{-2}$	$5\cdot10^{-2}$
80°	$4{,}27\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-1}$

[1] *Jahnke-Emde*, Funktionentafeln, S. 79 oder genauer S. 86, 4. Aufl. Leipzig 1948.

Um φ in seine beiden Teile (Mittelwert und Schwankung) zu zerlegen, differentiieren wir (20) nach der Zeit und erhalten

$$\frac{d\varphi}{dt}(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{\pi\sigma}{2\mathsf{K}}\sqrt{\frac{l}{k'}}\,(1+\operatorname{tg}^2 s)$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\pi\sigma}{2\mathsf{K}}\sqrt{\frac{l}{k'}}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2 s}{1+\frac{l}{k'}\operatorname{tg}^2 s},$$

und dies formt man leicht um in

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\pi\sigma}{\mathsf{K}}\,\frac{\sqrt{k'l}}{k'+l}\,R; \tag{21}$$

dabei ist

$$R\equiv\frac{1}{1+\varepsilon\cos 2s}\qquad\text{mit}\qquad\varepsilon=\frac{k'-l}{k'+l}. \tag{22}$$

Weil $|\varepsilon|<1$ bleibt, so kann man R in die stets konvergente Reihe

$$R=1-\varepsilon\cos 2s+\varepsilon^2\cos^2 2s-\varepsilon^3\cos^3 2s+-\cdots$$

entwickeln und danach gliedweise integrieren. Benützt man dabei die goniometrischen Formeln

$$\cos^{2n-1}x=\frac{1}{2^{2n-2}}\left[\cos(2n-1)x+\binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)x+\right.$$
$$\left.+\binom{2n-1}{2}\cos(2n-5)x+\cdots+\binom{2n-1}{n-1}\cos x\right],$$

$$\cos^{2n}x=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\cos 2nx+\binom{2n}{1}\cos(2n-2)x+\right.$$
$$\left.+\binom{2n}{2}\cos(2n-4)x+\cdots+\binom{2n}{n-1}\cos 2x+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right],$$

so erhält man

$$\int_0^t R\,dt=a_0 t-\frac{\mathsf{K}}{\pi\sigma}\left(a_1\sin\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}-a_2\sin 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}+a_3\sin 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}-+\cdots\right) \tag{23}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\sum_0^\infty\binom{2\nu}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu},\qquad a_1=2\sum_0^\infty\binom{2\nu+1}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu+1},\\ a_n&=\frac{2}{n}\sum_0^\infty\binom{2\nu+n}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu+n}\qquad(n>0).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Diese Koeffizienten kann man leicht berechnen. Schreibt man die Reihen a_0, a_1 und a_2 ausführlich an, so erkennt man sofort, daß

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{k'+l}{2\sqrt{k'l}},\\ a_1&=\frac{2}{\varepsilon}(a_0-1),\\ a_2&=\frac{a_1}{\varepsilon}-a_0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ist. Um die weiteren Koeffizienten zu ermitteln, geht man vom *Pascal*schen Binomialkoeffizienten-Satz

$$\binom{2\nu+n}{\nu}=\binom{2\nu+n+1}{\nu+1}-\binom{2\nu+n}{\nu+1}$$

aus, führt rechts $\nu=\nu'-1$ ein und erhält

$$\sum_0^\infty\binom{2\nu+n}{\nu}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu+n}=\sum_1^\infty\binom{2\nu'+n-1}{\nu'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu'+n-2}-\sum_1^\infty\binom{2\nu'+n-2}{\nu'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\nu'+n-2}$$

und daher durch Vergleich mit (24) alsbald die Rekursionsformel

$$a_n=\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{\varepsilon}a_{n-1}-\frac{n-2}{2}a_{n-2}\right)\qquad(n>2), \tag{26}$$

welche alle weiteren Koeffizienten a_3, a_4, ... vollends zu berechnen, d. h. in ε auszudrücken erlaubt.

Nunmehr folgt aus (21) durch Integration gemäß (23) und mit dem Wert a_0 von (25)

$$\varphi = \omega_e t + \tilde{\varphi}(t). \tag{27}$$

Dabei ist

$$\omega_e = \frac{\pi\sigma}{2\mathsf{K}} \tag{28}$$

der Mittelwert der Eigendrehgeschwindigkeit und

$$\tilde{\varphi}(t) = -\frac{\sqrt{k'l}}{k'+l}\left(a_1 \sin\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - a_2 \sin 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + a_3 \sin 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - + \cdots\right) \tag{29}$$

die Schwankung von φ um seinen Mittelwert $\omega_e t$, und zwar ausgedrückt als *Fourier*reihe in der Periode $2\mathsf{K}/\sigma$ der Drehung φ. Hiermit ist — im Rahmen unserer Näherung — die Eigendrehung der *Poinsot*bewegung übersichtlich zerlegt und dargestellt.

Im Falle $B=C$ des kräftefreien symmetrischen Kreisels wird $k=0$, also $\mathsf{K}=\pi/2$ und also $\omega_e=\sigma=[(A-B)/B]\,\omega_{s_0}$, wie von der regulären Präzession dieses Kreisels wohlbekannt ist; außerdem wird $k'=l=1$, also $\varepsilon=0$, und damit verschwindet die Schwankung, wie es sein muß, identisch, da (wie leicht nachzurechnen) a_1 wie ε, a_2 wie ε^2 und allgemein a_n wie ε^n verschwindet.

4. Die Präzessionsdrehung der Poinsotbewegung. Man formt (15) um in

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{2BC}\left[(B+C)+(B-C)\frac{1-\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\right]$$

oder mit der Näherung (20)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{2BC}\left[(B+C)+(B-C)\frac{k'\cos^2 s - l\sin^2 s}{k'\cos^2 s + l\sin^2 s}\right]$$

oder etwas anders geschrieben

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{2BC}\left[(B+C)+(B-C)\left(\frac{k'+l}{k'-l} - \frac{4k'l}{k'^2-l^2}R\right)\right]$$

und integriert dies gemäß (23) und mit Beachtung von a_0 (25) zu

$$\psi = \omega_p t + \tilde{\psi}(t). \tag{30}$$

Hier bedeutet

$$\omega_p = \frac{D}{2BC}\left[(B+C)+(B-C)\frac{\sqrt{k'}-\sqrt{l}}{\sqrt{k'}+\sqrt{l}}\right] \tag{31}$$

den Mittelwert der Präzessionsgeschwindigkeit und

$$\tilde{\psi}(t) = \frac{D(B-C)}{BC}\,\frac{2k'l}{k'^2-l^2}\,\frac{\mathsf{K}}{\pi\sigma}\left(a_1 \sin\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - a_2 \sin 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + a_3 \sin 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - + \cdots\right) \tag{32}$$

die Schwankung von ψ um seinen Mittelwert $\omega_p t$, und zwar ebenfalls ausgedrückt als *Fourier*reihe in der Periode $2\mathsf{K}/\sigma$ der Eigendrehung φ. Damit ist — wieder im Rahmen unserer Näherung — auch die Präzession der *Poinsot*bewegung in ihre kinematischen Bestandteile zerlegt.

Man sieht aus (31) und (32) deutlich, inwieweit mit $B \neq C$ diese Präzession von der regulären Präzession $\omega_p = D/B$ des symmetrischen kräftefreien abweicht. Mit $B=C$ geht tatsächlich ω_p (31) in diesen Wert über und $\tilde{\psi}(t)$ verschwindet identisch (wegen $a_n \sim \varepsilon^n$).

5. Der Präzessionswinkel der Poinsotbewegung. Schließlich wollen wir die entsprechende Entwicklung auch noch für den Winkel δ zwischen Drehimpuls- und x-Achse durchführen. Weil, wie aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt,

$$\mathrm{dn}\,\sigma t = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(\sigma t)}{\vartheta_4(\sigma t)} \tag{33}$$

ist, wo für die Thetafunktionen ϑ_3 und ϑ_4 die Reihen

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(\sigma t) &= 1 + 2\left(q\cos\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + q^4\cos 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + q^9\cos 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + \cdots\right), \\
\vartheta_4(\sigma t) &= 1 - 2\left(q\cos\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - q^4\cos 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} + q^9\cos 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}} - + \cdots\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

gelten, so dürfen wir mit noch kleinerem Fehler als vorhin nach (12) genähert

$$\cos\delta=\sqrt{k'}\,\cos\delta_0\,\frac{1+2q\cos\dfrac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}}{1-2q\cos\dfrac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}}\qquad\text{mit}\qquad\cos\delta_0=\frac{A\,\omega_{x0}}{D}\tag{35}$$

setzen. Dabei ist δ_0 der Winkel δ beim Bewegungsbeginn.

Entwickelt man (35) in eine Reihe, wobei man folgerichtig nur bis zur Potenz q^3 fortschreiten kann, so erhält man genähert

$$\cos\delta=u_0+\bar{u}(t)\,.\tag{36}$$

Hier bedeutet

$$u_0=(1+4q^2)\sqrt{k'}\,\cos\delta_0\tag{37}$$

die mittlere Entfernung des Punktes $x=1$ der x-Achse von der Ebene durch den Schwerpunkt parallel zur invariablen Ebene und

$$\bar{u}(t)=4q\sqrt{k'}\,\cos\delta_0\left[(1+3q^2)\cos\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}+q\cos 2\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}+q^2\cos 3\frac{\pi\sigma t}{\mathsf{K}}+\cdots\right]\tag{38}$$

die Schwankung dieser Entfernung als *Fourier*reihe mit der Periode von φ.

Auch hier sieht man deutlich die Abweichung von der regulären Präzession. Mit $B=C$, also $k'=1$, $\mathsf{K}'=\infty$, $q=0$ kommt $u_0=\cos\delta_0$ und $\bar{u}(t)\equiv 0$.

6. Abschätzung des Gültigkeitsbereichs. Mit Annäherung an den symmetrischen Kreisel ($B=C$) oder an die stabile permanente Drehung um die x-Achse ($\omega_{x0}=0$) geht q und damit der Fehler in (20) und allen folgenden Formeln gegen Null. Der Fehler wächst dagegen mehr und mehr bei Annäherung an den Sonderfall $k=1$, der bekannt ist als sogenannter Fall der trennenden Polbahn, also wenn zu irgendeiner Zeit die Drehachse genau oder nahezu genau mit der Hauptachse der mittleren Drehmasse B zusammenfällt. Das sind aber *Poinsot*bewegungen von zweifelhafter Stabilität, die man sowieso nicht mehr unter dem Bild einer Präzession fassen kann. Die Grenze für die Genauigkeit unserer Lösung ist also sachlich begründet: diese Formeln können naturgemäß die *Poinsot*bewegung nur solange durch eine Präzession mit überlagerten Schwankungen approximieren, als sie selbst einigermaßen das Gepräge einer Präzession besitzt; je mehr sie sich davon entfernt, um so mehr muß unsere Lösung versagen.

An Hand der Fehlertabelle in Ziff. 3 läßt sich leicht abschätzen, für welche *Poinsot*bewegungen unsere Formeln bei einem Fehler von vorgeschriebenem Höchstbetrag noch Geltung beanspruchen dürfen. Für $\delta=0$ sind sie exakt; der größte bei jenem Fehlerhöchstbetrag noch zulässige Öffnungswinkel δ_1 des Kegels der „mittleren" Präzession kann sofort ermittelt werden. Es gilt nämlich zufolge (37) und (35) mit den zu gegebenem Fehlerhöchstbetrag gehörenden Tabellenwerten Θ_1 und q_1

$$\cos\delta_1=(1+4q_1^2)\sqrt{\cos\Theta_1}\,\frac{A\,\omega_{x0}}{\sqrt{A^2\omega_{x0}^2+C^2\omega_{z0}^2}}$$

oder gemäß (10) wegen $k=\sin\Theta_1$

$$\cos\delta_1=\frac{(1+4q_1^2)\sqrt{\cos\Theta_1}}{\sqrt{1+m\sin^2\Theta_1}}\qquad\text{mit}\qquad m=\frac{C(A-B)}{A(B-C)}\,.\tag{39}$$

Läßt man beispielsweise einen Fehler von 2% zu, so kommt (laut Tabelle) mit $\Theta_1=60°$, $q_1^2=7{,}40\cdot10^{-3}$

$$\cos\delta_1=\frac{1{,}03\cdot0{,}707}{\sqrt{1+0{,}75\,m}}\,,$$

und dies gibt für folgende Verhältnisse $A:B:C$ die dahinter angeschriebenen Werte von δ_1:

$$\begin{aligned}&A:B:C=4:3:2 \qquad \delta_1=38{,}5°,\\ &A:B:C=2:3:4 \qquad \delta_1=62{,}5°,\\ &A:B:C=2:9:10 \qquad \delta_1=82°.\end{aligned}$$

Unsere Näherung ist also innerhalb einer Fehlergrenze von 2% für alle *Poinsot*bewegungen zwischen $\delta_0=0$ und $\delta_0=\delta_1$ brauchbar. Man erkennt überdies, daß unsere Näherung für $A<C$

genauer ist als für $A>C$, daß sie also die sogenannten epizykloidischen *Poinsot*bewegungen besser wiedergibt als die perizykloidischen.

Auch den Fehler von (36) kann man nachträglich abschätzen, indem man prüft, ob die aus (36) bis (38) für $t=0$ folgende Gleichheit

$$u_0 + \tilde{u}(0) = \cos \delta_0$$

oder ausführlich

$$1 + 4\,q^2 + 4\,q\,(1 + q + 4\,q^2) = \frac{1}{\sqrt{k'}}$$

erfüllt ist. Man findet an Beispielen, daß ihr Fehler regelmäßig erheblich unter der Fehlergrenze der Tabelle in Ziff. 3 bleibt. Der Fehler von (27) und (30) läßt sich ebenso an der Gleichheit

$$\omega_e + \frac{d\tilde{\varphi}(0)}{dt} + \left(\omega_p + \frac{d\tilde{\psi}(0)}{dt}\right) \cos \delta_0 = \omega_{x_0}$$

jederzeit leicht nachprüfen.

(Eingegangen am 14. Februar 1949.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Richard Grammel*, (14a) Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101.

Das Spektrum isotroper Turbulenz im statistischen Gleichgewicht*.

Von J. Rotta.

1. Einleitung. Für die Eigenschaften der Turbulenz ist die spektrale Verteilung der Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten über die verschiedenen Frequenzen oder die Korrelationsfunktionen bestimmend. Um diese kennzeichnenden Funktionen für isotrope, zeitlich abklingende Turbulenz theoretisch zu ermitteln, sind schon eine Reihe von Versuchen unternommen worden. In einigen neueren Arbeiten wird die Tatsache, daß die kinetische Turbulenzenergie von den größten Turbulenzelementen in die kleineren Wirbel fließt und dort schließlich durch molekulare Reibung vernichtet wird, als Grundlage für eine statistische Theorie der Turbulenz benutzt. Dabei eröffnet der von *W. Heisenberg*[1] angegebene Ansatz für die Erfassung des turbulenten Energieaustausches neue Möglichkeiten zur Behandlung noch offener Fragen. Auf dieser Grundlage wird hier das Spektrum der Turbulenz untersucht. Eng damit verbunden ist die Behandlung der Frage nach dem zeitlichen Abklingen der Energie.

2. Physikalische Grundlagen. Das Spektrum der Turbulenz einer inkompressiblen Flüssigkeit wird durch eine zeitlich veränderliche Funktion $F(k,t)$ definiert, wobei die Wellenzahl $k = 2\pi/\text{Wellenlänge}$ ist, derart, daß die kinetische Turbulenzenergie je Masseneinheit

$$E(t) = \frac{\overline{\mathfrak{u}^2}}{2} = \int_0^\infty F(k,t)\,dk \tag{2.1}$$

beträgt. Dabei ist $\overline{\mathfrak{u}^2}$ der quadratische Mittelwert des Vektors der turbulenten Bewegung; dagegen ist der lineare Mittelwert von $\mathfrak{u}$ gleich Null.

Der physikalische Sachverhalt ist folgender: Der in dem kleinen Spektralbereich dk einer bestimmten Wellenzahl k enthaltenen Turbulenzenergie $F(k,t)\,dk$ wird durch turbulenten Austausch einerseits von größeren Wellen dauernd Energie zugeführt, andererseits wird aber auch auf die gleiche Weise Energie an die Bereiche kleinerer Wellen angegeben; ein dritter Teil der Energie wird durch molekulare Reibung in Wärme umgesetzt. Letzterer Anteil ist nur bei den kleinsten Turbulenzelementen wesentlich; bei den größeren Wellen bleibt er ohne Bedeutung. Aus der Summe dieser drei Anteile ergibt sich die gesamte Energieänderung $\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}\,dk$ des betrachteten Spektralbereiches. Drückt man diese Überlegungen in Formeln aus, so ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für das Spektrum, wenn man geeignete Beziehungen für die Änderung der Energie $\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}\,dk$ hinzunimmt.

Die gesamte Dissipation beträgt

$$S(t) = -\frac{dE}{dt} = -\int_0^\infty \frac{\partial F(k,t)}{\partial t}\,dk. \tag{2.2}$$

Andererseits gilt aber auch (vgl. z. B. die zitierte Arbeit von *Heisenberg*)

$$S(t) = \nu \int_0^\infty 2F(k,t)k^2\,dk \tag{2.3}$$

mit $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ = kinematische Zähigkeit.

Die Gleichungen (2.2) und (2.3) reichen zur Festlegung von $\partial F(k,t)/\partial t$ nicht aus, so daß noch weitere Beziehungen erforderlich sind. *A. N. Kolmogoroff*[2] untersucht eine lokalisotrope Turbulenz, die in einem gewissen Bereich isotrop, homogen und zeitlich konstant ist. In diesem Falle ist die von einem bestimmten Spektralbereich an die Bereiche kleinerer Wellen abgegebene Energie gleich der von größeren Wellen zugeführten Energie, wenn man von der Aufzehrung durch molekulare Reibung absieht [$\partial F(k,t)/\partial t = 0$]. Dieselbe Annahme liegt den Untersuchungen

---

* Auszugsweise vorgetragen auf der Tagung der Ges. f. angew. Math. u. Mech. am 22. 9. 1948 in Göttingen.

[1] *W. Heisenberg*, Z. Physik 124 (1948) S. 628.

[2] *G. K. Batchelor*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 43, 4 (1947) S. 533.

von *C. F. v. Weizsäcker*[1] zugrunde. Unter Beachtung der Tatsache, daß die Turbulenzenergie hauptsächlich in den größten Elementen (Wellenlängen) enthalten ist, stellt die Annahme $\partial F(k,t)/\partial t = 0$ auch bei zeitlich abklingender Turbulenz eine sehr gute Annäherung dar, wenn man speziell den Bereich betrachtet, dessen Wellenlängen klein gegen die größten vorkommenden sind. Für die größeren Wellenlängen gibt diese Annahme die tatsächlich obwaltenden Vorgänge offenbar nicht in befriedigender Weise wieder. Der Vergleich der Rechnung von *W. Heisenberg* mit gemessenen Spektren von Windkanalturbulenz zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung in einem wesentlichen Wellenbereich zu wünschen übrig läßt.

Es soll deshalb versucht werden, einen anderen Ansatz für $\partial F(k,t)/\partial t$ zu finden, der in einem größeren Wellenbereich Übereinstimmung mit Messungen ergibt. Hierzu kann uns folgende Überlegung dienen. Der Abklingvorgang der isotrop vorausgesetzten Turbulenz sei quasistationär, so daß sich nach und nach in allen betrachteten Wellenbereichen statistisches Gleichgewicht einstellt. Dies ist möglich, wenn die Zeit, in der sich die Intensität der jeweils betrachteten Wellen merklich ändert, kleiner als diejenige Zeit ist, in welcher die gesamte Turbulenzenergie ihre Größe merklich ändert. Da die zeitliche Änderung der Intensität der kleinen Wellenlängen schneller erfolgt als die der großen, andererseits das Tempo der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie im wesentlichen durch die größten vorkommenden Wellenlängen bestimmt wird, ist zu erwarten, daß sich nach Ablauf einer endlichen Zeit in dem Wellenzahlenbereich $k > \vartheta$ ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Dabei ist ϑ eine unbekannte Größe, die mit wachsender Abklingzeit abnimmt und schließlich gegen Null geht.

Das Kennzeichen des ausgebildeten statistischen Gleichgewichtes ist nun, daß das Aussehen des Spektrums unabhängig vom Zustand der Turbulenz im Augenblick ihrer Entstehung ist. Formal können wir also für das Spektrum im ausgebildeten Gleichgewichtszustand schreiben

$$F(k,t) = E(t)\, L(t) f(\chi, Re)\,, \tag{2.4}$$

wobei voraussetzungsgemäß $f(\chi, Re)$ nur eine Funktion der dimensionslosen Veränderlichen

$$\chi = k L(t) \tag{2.5}$$

ist und außerdem von der *Reynolds*zahl der Turbulenz

$$Re = \frac{\varkappa \sqrt{E}\, L}{\nu} \tag{2.6}$$

abhängt. Die Bedeutung der Konstanten $\varkappa$ wird im nächsten Abschnitt erläutert. $L(t)$ ist eine kennzeichnende Länge der Turbulenz, die allgemein ebenso wie $E(t)$ eine Funktion der Zeit t ist. Die Länge L in (2.4) und (2.5) wollen wir als eine mittlere Wellenlänge definieren:

$$L(t) = \frac{1}{E} \int_0^\infty \frac{F(k,t)}{k}\, dk\,. \tag{2.7}$$

Durch (2.4) kommt eine Ähnlichkeitsbeziehung zum Ausdruck. Und zwar gilt die Ähnlichkeit für eine Fläche im k, F, t-Raum. In dieser allgemeineren Betrachtungsweise des Problems glaubt der Verfasser einen Fortschritt gegenüber bisher bekannt gewordenen Ansätzen zu sehen, bei welchen vermittels Ähnlichkeitshypothesen, die sich nur auf eine Kurve im zweidimensionalen Koordinatensystem beziehen, die Eigenschaften der Turbulenz studiert wurden.

3. Gleichungen des statistischen Gleichgewichtszustandes. Wir können nun daran gehen, eine geeignete Beziehung für die Energieänderung $\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}\, dk$ für die im statistischen Gleichgewicht befindliche Turbulenz zu entwickeln. Wir gehen dabei von der Beziehung (2.4) aus.

Die Differentiation von (2.4) nach der Zeit t und der Wellenzahl k ergibt dann beziehungsweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(k,t)}{\partial t} = \frac{dE}{dt} L(t) f(\chi, Re) + E(t) \left[f(\chi, Re) + \frac{\partial f(\chi, Re)}{\partial \chi}\, \chi \right] \frac{dL(t)}{dt} + \\ + E(t)\, L(t) \frac{\partial f(\chi, Re)}{\partial Re} \frac{dRe}{dt}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial F(k,t)}{\partial k} = E(t) \frac{\partial f(\chi, Re)}{\partial \chi} L^2(t) = E(t)\, L(t) \frac{\partial f(\chi, Re)}{\partial \chi} \frac{\chi}{k}\,. \tag{3.2}$$

Eliminiert man in (3.1) die Größe $f(\chi, Re)$ mit (2.4) und $\partial f(\chi, Re)/\partial \chi$ mit (3.2), so erhält man

$$\frac{\partial F(k,t)}{\partial t} = \frac{dE/dt}{E(t)} F(k,t) + \left[F(k,t) + k \frac{\partial F(k,t)}{\partial k} \right] \frac{dL/dt}{L(t)} + E(t)\, L(t) \frac{\partial f(\chi, Re)}{\partial Re} \frac{dRe}{dt}\,. \tag{3.3}$$

[1] *C. F. v. Weizsäcker*, Z. Physik 124 (1948) S. 614.

Da sowohl L als auch E eindeutige Funktionen der Zeit t sind, kann man $L(t)$ auch in Abhängigkeit von $E(t)$ ausdrücken. Es ist also

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dE}\frac{dE}{dt},$$

und

$$\frac{dL/dt}{L} = \frac{E}{L}\frac{dL}{dE}\frac{dE/dt}{E} = \frac{d\log L}{d\log E}\frac{dE/dt}{E}.$$

Wir setzen der einfacheren Schreibweise wegen

$$\frac{d\log L(t)}{d\log E(t)} = -\zeta(t) \tag{3.4}$$

und führen nun noch

$$-\frac{dE/dt}{E} = \frac{S}{E} = C(t) \tag{3.5}$$

ein, wobei ζ und C von k unabhängige Funktionen der Zeit sind; so ergibt sich aus (2.6)

$$\frac{dRe}{dt} = -C\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)Re, \tag{3.6}$$

und wir erhalten dann als endgültige Form für $\partial F(k,t)/\partial t$

$$-\frac{\partial F(k,t)}{\partial t} = C\left\{F(k,t)-\zeta\left[F(k,t)+k\frac{\partial F(k,t)}{\partial(k)}\right]+\left(\frac{1}{2}-\zeta\right)Re\frac{\partial F(k,t)}{\partial Re}\right\}, \tag{3.7}$$

worin $\partial F(k,t)/\partial Re = E(t)L(t)\,\partial f(\chi,Re)/\partial Re$ ist. Für die weiteren Rechnungen brauchen wir eine Aussage über die Größe und die zeitliche Abhängigkeit von ζ. Man könnte zunächst einfach ζ konstant annehmen. Richtiger ist es jedoch, die Funktion $F(k,t)$ im Bereich der kleinsten k-Werte zeitlich konstant anzusetzen, wie sich leicht an Hand der für die Dissipation geltenden Beziehung (3.15) nachweisen läßt. Für $\left(\frac{\partial F(k,t)}{\partial t}\right)_{k\to 0} = 0$ geht dann (3.7) über in

$$\lim_{k\to 0} F(k)-\zeta\left[F(k)+k\frac{\partial F(k)}{\partial k}+Re\frac{\partial F(k)}{\partial Re}\right]+\frac{1}{2}Re\frac{\partial F(k)}{\partial Re} = 0. \tag{3.8}$$

Diese partielle Differentialgleichung läßt sich durch den Ansatz

$$f(\chi,Re) = \text{konst}\;\chi^{\xi-1}\varphi(Re), \tag{3.9}$$

also $F(k,t) = \text{konst}\;EL^{\xi}k^{\xi-1}\varphi(Re)$ befriedigen. Wegen der Unbestimmtheit von ζ wird jeder Wert $\xi \neq 1$ in (3.9) der Beziehung (3.8) gerecht, so daß die Funktion $f(\chi,Re)$ noch von einem Parameter ξ abhängig ist, über dessen Größe die bisherigen Überlegungen nichts aussagen. Physikalisch sinnvolle Lösungen erhält man nur für $\xi > 1$.

Setzt man (3.9) in (3.8) ein und eliminiert die unbekannte Funktion $\varphi(Re)$ mit (3.9), so erhält man eine Beziehung zwischen der Größe ζ und dem Parameter ξ:

$$\zeta = \frac{1+\eta/2}{\xi+\eta}, \tag{3.10}$$

wobei

$$\eta = \lim_{k\to 0}\frac{Re}{F(k)}\frac{\partial F(k)}{\partial Re} = \lim_{\chi\to 0}\frac{Re}{f(\chi,Re)}\frac{\partial f(\chi,Re)}{\partial Re}$$

ist. Der Wert η hat in jedem Intervall, d. h. bei jeder *Reynolds*zahl einen anderen Wert, während ξ den gleichen Wert im ganzen Re-Zahlbereich beibehält. Die spätere Rechnung zeigt, daß η nur sehr klein bleibt, und bei mittleren *Reynolds*zahlen seinen Größtwert erreicht (Größenordnung $\eta \approx -0{,}1$); für $Re = \infty$ und $Re = 0$ wird $\eta = 0$. Im wesentlichen ist also $\zeta \approx 1/\xi$; die Größe ζ ist nahezu konstant. Die Beziehung (3.10) liefert mit (3.4) den zeitlichen Zusammenhang zwischen E und L.

Bei der weiteren Rechnung kann man unmittelbar an die von *W. Heisenberg*[1] hergeleiteten Beziehungen anschließen. Betrachtet man nur den Teil des Spektrums zwischen den Wellenzahlen 0 bis k, so ist die Dissipation für diesen Teil analog (2.2)

$$S_k = -\int_0^k \frac{\partial F(k',t)}{\partial t}\,dk'. \tag{3.11}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 60.

Nach Einsetzen von (3.7) und (3.10) ergibt die Integration

$$S_k = C\left[E_k - \frac{1+\eta/2}{\xi+\eta}\, k\, F(k,t) + \frac{\xi-2}{2(\xi+\eta)}\, Re \int_0^k \frac{\partial F(k',t)}{\partial Re}\, dk'\right], \tag{3.12}$$

wenn E_k die in dem Teil von 0 bis k des Spektrums enthaltene Turbulenzenergie

$$E_k = \int_0^k F(k,t)\, dk' \tag{3.13}$$

ist.

Die Beziehung (3.12) stellt eine ziemlich allgemeine Bedingung für das statistische Gleichgewicht der Turbulenz dar. Voraussetzungen sind nur, daß das Spektrum einer von den Anfangsbedingungen unabhängigen Formen zustrebt und daß $F(k,t)$ im Bereich $k \to 0$ zeitlich konstant bleibt, deren Berechtigung dadurch offenbar wird, daß der Betrag S_k der Dissipation nach (3.15) für $k \to 0$ von höherer Ordnung gegen Null geht als die Energie E_k nach (3.13). Bekannt ist nun der Verlauf des Spektrums in der Nähe $k=0$

$$F(k) \sim k^{\xi-1}, \tag{3.14}$$

wobei ξ ein zunächst frei wählbarer Parameter ist. Wir wissen lediglich, daß $\xi > 1$ sein muß, um brauchbare Lösungen zu bekommen, d. h. solche, bei denen für $k=0$ auch $F(o,t)=0$ ist. Im Abschnitt 6 werden wir noch eine weitere Aussage über das Verhalten von $F(k,t)$ bei kleinen k-Werten und über die Größe ξ bekommen.

Die Auswertung von (3.12) erfordert eine zweite Gleichung für S_k, die die turbulenten Austauschvorgänge in geeigneter Weise erfaßt. Diese steht uns in den von *W. Heisenberg* aus Ähnlichkeitsbetrachtungen hergeleiteten Beziehungen zur Verfügung. Es gilt dann

$$S_k = \nu_k \int_0^k 2\, F(k',t)\, k'^2\, dk', \tag{3.15}$$

wenn ν_k die Summe der Zähigkeiten aus molekularer Reibung und turbulentem Energieaustausch darstellt:

$$\nu_k = \nu + \varkappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k'',t)}{k''^3}}\, dk''. \tag{3.16}$$

Die Größe $\varkappa$ soll hierbei eine reine Zahl sein, die weder von der Wellenzahl k noch von irgendwelchen Stoffeigenschaften abhängt. *W. Heisenberg* hat versucht, die Größe $\varkappa$ aus den hydrodynamischen Gleichungen rechnerisch zu bestimmen, ist aber zu keinem endgültig befriedigenden Ergebnis gekommen; lediglich kennt man die Größenordnung von $\varkappa$. Für unsere Rechnungen betrachten wir $\varkappa$ als eine Größe, über die man zunächst noch frei verfügen kann, und die dann später so festgelegt werden soll, daß sich eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ergibt. Selbstverständlich kann dieses Vorgehen nur dann einen physikalischen Sinn haben, wenn beim Vergleich mit Versuchsergebnissen verschiedener Herkunft den Berechnungen stets der gleiche Wert von $\varkappa$ zugrunde gelegt wird. Nötigenfalls wird man $\varkappa$ eine gewisse *Re*-Zahlabhängigkeit zubilligen können. Aus Gründen der rechnerischen Behandlung wird die Konstante $\varkappa$ in die *Reynolds*zahl nach (2.6) hineingenommen.

Für die Rechnung ist nun die Tatsache wichtig, daß der Einfluß der *Re*-Zahl auf $F(k,t)$ praktisch nur dort zu Auswirkung kommt, wo die kinematische Zähigkeit wirksam wird, das ist also im Gebiet der kleinsten Wellenlängen. Im übrigen k-Bereich ist $\partial F(k,t)/\partial Re$ nur klein. Für kleine und mäßig große k-Werte wird der dritte Summand in der eckigen Klammern von (3.12) daher nur klein gegen die anderen Summanden sein. Aber auch dort, wo die Wirkung der kinematischen Zähigkeit wesentlich ist, wird wegen des hier herrschenden raschen Abfalles von $F(k,t)$ mit k der von der *Re*-Zahl abhängige Anteil nur ein unbedeutendes Korrekturglied neben dem Betrag E_k, der hier $E_k \approx E$ wird, bleiben. Man darf deshalb eine die wirklichen Verhältnisse sehr gut wiedergebende Näherung erwarten, wenn man in (3.12) $\partial F(k,t)/\partial Re = 0$ setzt und mit der vereinfachten Gleichung[1]

$$S_k = C\left[E_k - \frac{1}{\xi}\, k\, F(k,t)\right] \tag{3.17}$$

arbeitet.

[1] Für den Spezialfall $\xi=2$ hat *W. Heisenberg*, Proc. Roy. Soc. A 195 (1948) S. 402, die gleiche Beziehung gefunden und damit das Spektrum der Turbulenz diskutiert. Die auf die Beziehung (3.17) führenden Überlegungen hat der Verfasser in von obigen Darlegungen etwas abweichender Form durchgeführt, ohne von der Existenz dieser *Heisenberg*schen Arbeit zu wissen.

Für hinreichend große Wellenzahlen k nähert sich E_k einem konstanten Endwert, nämlich dem Wert E der Gesamtenergie nach (2.1) und $kF(k,t)$ geht gegen Null. Damit geht (3.17) über in

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \text{konst} . \tag{3.18}$$

Für große k-Werte ist (3.17) also identisch mit der Bedingung, die den Untersuchungen von *v. Weizsäcker* und *Heisenberg*[1] zugrunde liegt. Für beliebig große *Reynolds*zahlen wird darüber hinaus der Ausdruck

$$Re \int_0^k \frac{\partial F(k',t)}{\partial Re} \, dk'$$

beliebig klein gegen E_k, so daß also bei großen Re-Zahlen (3.18) auch die asymptotische Form der vollständigen Gleichung (3.12) ist.

4. Durchführung der Rechnung. In (3.17) werden die Gleichungen (3.13), (3.15) und (3.16) eingesetzt. In Anbetracht der zu erfassenden Bereiche von $F(k,t)$ und k werden wie bei *Heisenberg*[1] logarithmische Koordinaten eingeführt:

$$\log_e \frac{k}{k_0} = x ; \; -w = \log_e \frac{F(k,t)}{F(k_0,t)} ; \; w = w(x) ,$$

wobei k_0 irgendeine Wellenzahl innerhalb des vorkommenden Wellenbereiches und $F(k_0,t)$ den zu k_0 gehörigen Wert von $F(k,t)$ bezeichnet. Die so umgeformte Gleichung zwischen x und w hat die Form

$$\left(\frac{1}{\Re} + \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-\frac{w+x}{2}} \, dx \right) \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{3x-w} \, dx = c \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{x-w} \, dx - \frac{e^{\bar{x}-w(\bar{x})}}{\xi} \right) . \tag{4.1}$$

Hierbei treten drei Parameter auf:

1. die Größe ξ,
2. die *Reynolds*-Zahl
$$\Re = \frac{\varkappa \sqrt{F(k_0,t)/k_0}}{\nu} , \tag{4.2}$$
3. das Dissipationsverhältnis
$$c = \frac{C}{2 k_0^2 \varkappa \sqrt{\dfrac{F(k_0,t)}{k_0}}} . \tag{4.3}$$

Die Zahl der Parameter läßt sich durch Einführen einer neuen Variablen für w jedoch auf zwei reduzieren. Würde man z. B. $e^{-u} = (1/c^2) e^{-w}$ setzen, so würden nur noch die beiden Parameter $(c\Re)$ und ξ übrigbleiben. Als Lösung von (4.1) ist also, wie anfänglich vorausgesetzt, eine zweiparametrige Kurvenschar zu erwarten. Es erscheint jedoch zweckmäßig, die Form (4.1) beizubehalten.

Für (4.1) lassen sich zwei spezielle Lösungen angeben, die später von Nutzen sein werden. Setzt man die rechte Seite von (4.1) gleich einer Konstanten, so hat man den von *Heisenberg* behandelten Fall, für den man die allgemeinen Lösung

$$w = \frac{5}{3} x + \frac{4}{3} \log_e (A e^{4x} + 1) + \lambda \tag{4.4}$$

findet. Darin sind A und λ Integrationskonstanten. Wir setzen $\lambda = 0$, dann wird

$$\lim_{\bar{x} \to \infty} \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{3x-w} \, dx = \frac{3}{4 (A + e^{-4\bar{x}})^{1/4}} \approx \frac{3}{4 A^{1/4}} - \frac{e^{-4\bar{x}}}{4 A^{5/4}} .$$

$$\lim_{\bar{x} \to \infty} \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-\frac{w+x}{2}} \, dx = \frac{e^{-4\bar{x}}}{4 A^{3/4}} .$$

Setzt man dies in (4.1) ein, so kommt

$$\left(\frac{1}{\Re} + \frac{e^{-4\bar{x}}}{4 A^{3/4}} \right) \left(\frac{3}{4 A^{1/4}} - \frac{e^{-4\bar{x}}}{4 A^{5/4}} \right) = \text{konst.}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von S. 60.

Daraus folgt

$$A = \left(\frac{4}{3\,\Re}\right)^3 .$$

Gleichung (4.4) hat somit die Asymptote

$$\lim_{x\to\infty} w = 7x + 1{,}151 - 4\log_e\left(\frac{\varkappa}{\nu}\sqrt{\frac{F(k_0)}{k_0}}\right), \tag{4.5}$$

und für das Spektrum, das von $F(k) \sim k^{-5/3}$ mit wachsendem k in $F(k) \sim k^{-7}$ übergeht, gilt die exakte Form

$$F(k) = F(k_0)\left(\frac{k_0}{k}\right)^{5/3}\left[1 + \left(\frac{4}{3\,\frac{\varkappa}{\nu}\sqrt{\frac{F(k_0)}{k_0}}}\right)^3\left(\frac{k}{k_0}\right)^4\right]^{-4/3}. \tag{4.6}$$

Eine andere Lösung für (4.1) findet man, wenn man $\Re \to 0$ gehen läßt. Das Integral

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-\frac{w+x}{2}}\,dx$$

kann dann neben $1/\Re$ vernachlässigt werden. Die Lösung für diesen Fall, der das letzte Stadium der Turbulenz kennzeichnet, bei dem die Trägheitskräfte keine Bedeutung mehr haben, lautet

$$w = -(\xi - 1)\,x + \frac{\xi}{2\,c\,\Re}\,e^{2x} + \omega\,. \tag{4.7}$$

Dabei ist ω wieder eine Integrationskonstante.

Für die vollständige Gleichung (4.1) läßt sich keine Lösung in geschlossener Form finden. Eine schrittweise Integration kann wegen des breiten (x,w)-Bereiches nur mit sehr weit getriebener Rechengenauigkeit und mehrfachem Probieren zu zuverlässigen Ergebnissen führen. Daher wird (4.1) durch Reihenentwicklungen gelöst[1]. Um bei der Berechnung der in diesen Reihen auftretenden Koeffizienten die in (4.1) notwendigen Quadraturen zu vermeiden, wird (4.1) dreimal nach x differentiiert, wobei zwischen den einzelnen Differentiationen geeignete Umformungen vorgenommen werden, so daß eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung entsteht (Striche bedeuten Ableitung nach x):

$$\left.\begin{aligned} e^{\frac{3x-w}{2}}\left[35 - 26w' + 3w'^2 + 4w''\right] = c\,\big[42 - 20w' + 2w'^2 + 4w'' - \frac{1}{\xi}\,(42 - 62w' + \\ + 22w'^2 - 2w'^3 - 3w'' + 2w''^2 - 10w'w'' + w'^2w'' + 14w''' - 2w'w''')\big]\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Ausgehend von der Lösung (4.4) wird w in eine Reihe entwickelt, die für positive x-Werte konvergiert (Tafel 1). Ferner wird von (4.7) ausgehend ein Ansatz entwickelt, der für negative x-Werte konvergiert (Tafel 2), wobei der Fall $\xi = 2$ eine Sonderstellung einnimmt.

Der gesamte Kurvenzug wird bei $x = 0$ aus den beiden Ästen nach Tafel 1 und 2 zusammengesetzt, wobei die beiden Kurventeile stetig und ohne Krümmungssprung ineinander übergehen müssen. Zweckmäßig wird $\lambda = \omega$ gesetzt. Aus den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \tilde{w}(o) &= w(o) = 0\,, \\ \tilde{w}'(o) &= w'(o)\,, \\ \tilde{w}''(o) &= w''(o) \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

bestimmen sich dann für gegebene Werte ξ und A (*Reynolds*zahl) die unbekannten Größen c, λ, B und D; dabei werden $w(o)$, $w'(o)$ und $w''(o)$ nach Tafel 1, $\tilde{w}(o)$, $\tilde{w}'(o)$ und $\tilde{w}''(o)$ nach Tafel 2 ermittelt.

Abb. 1 zeigt einige Näherungen für $\xi = 2$, $A = 0$. Die Rechnungen konvergieren sehr gut, so daß nur wenige Glieder jeder Reihe benötigt werden. Schon die erste Näherung gibt den Verlauf im wesentlichen richtig wieder. Das Spektrum nach der von *Heisenberg*[2] angegebenen Näherungsformel wurde ebenfalls mit eingezeichnet.

---

[1] Herrn Prof. *W. Heisenberg* ist der Verfasser für wichtige Hinweise bei der Lösung zu großem Dank verpflichtet.

[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 63.

Die Gesamtenergie beträgt

$$E = F(k_0,t)\,k_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-w}\,dx \tag{4.10}$$

und das Produkt

$$EL = F(k_0,t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w}\,dx\,. \tag{4.11}$$

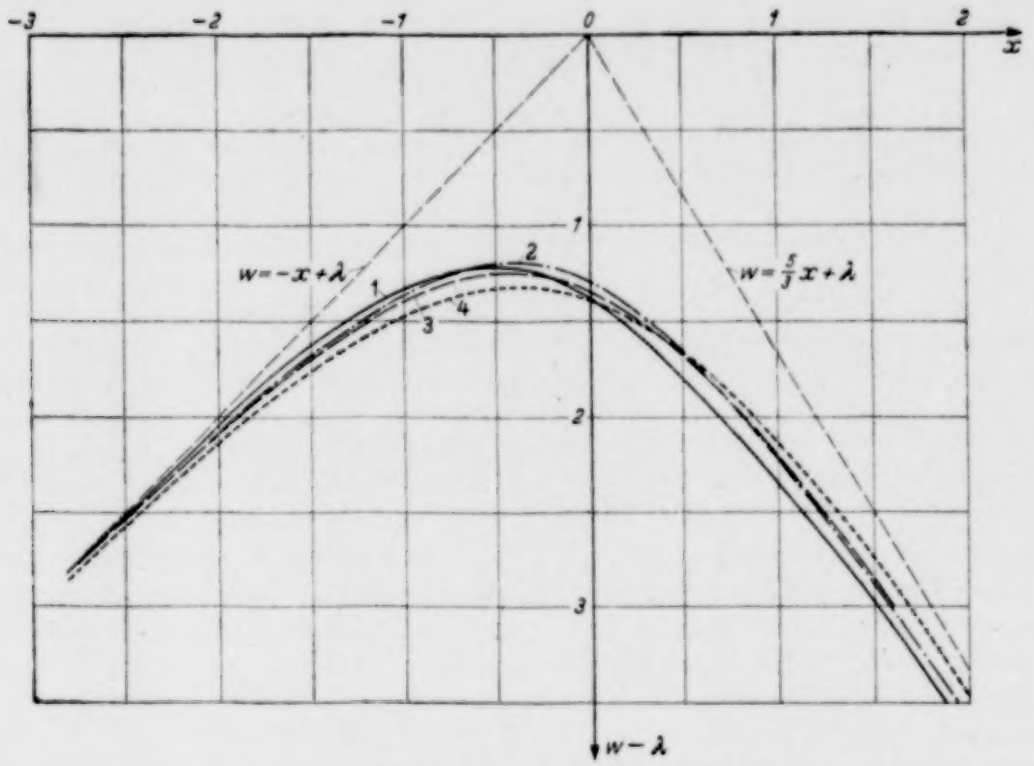


Abb. 1. Näherungslösungen von (4.1) für $\xi=2$, $A=0$.

1) 1. Näherung:

$x \lessgtr 0$: $\tilde{w} = -x + (1{,}382 - 1{,}137\,x)\,e^{2x} + \lambda$;

$x \gtrless 0$: $w = \frac{5}{3}\,x + 1{,}340\,e^{-2x/3} + 0{,}152\,e^{-(2{,}286x + 1{,}278\,e^{2x/3})} + \lambda$;

$\lambda = -1{,}382$.

2) 2. Näherung:

$x \lessgtr 0$: $\tilde{w} = -x + (0{,}775 - 1{,}710\,x)\,e^{2x} + (0{,}523 - 0{,}426\,x)\,e^{4x} + \lambda$;

$x \gtrless 0$: $w = \frac{5}{3}\,x + 0{,}891\,e^{-2x/3} + 0{,}397\,e^{-4x/3} + 0{,}069\,e^{-(2{,}286x + 1{,}928\,e^{2x/3})} + \lambda$;

$\lambda = -1{,}298$.

3) 3. Näherung:

$x \lessgtr 0$: $\tilde{w} = -x + (0{,}738 - 1{,}991\,x)\,e^{2x} + (0{,}585 - 0{,}499\,x)\,e^{4x} + \lambda$;

$x \gtrless 0$: $w = \frac{5}{3}\,x + 0{,}823\,e^{-2x/3} + 0{,}339\,e^{-4x/3} + 0{,}243\,e^{-2x} - 0{,}064\,e^{-(2{,}286x + 2{,}080\,e^{2x/3})} + \lambda$;

$\lambda = -1{,}323$.

4) Näherung nach *Heisenberg* (siehe Fußnote 1 auf Seite 63)

für $-\infty < x < \infty$: $w = -x + 2\log_e(1 + e^{4x/3}) + \lambda$;

$\lambda = -1{,}386$.

Die Quadraturen lassen sich im allgemeinen nicht geschlossen durchführen. Nur bei der für $\Re \to 0$ angegebenen Lösung (4.7) ist dies möglich. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Re\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-w}\,dx &= \frac{e^{-\omega}\,\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right)}{2\left(\frac{\xi}{2c\Re}\right)^{\xi/2}}\,, \\ \lim_{\Re\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w}\,dx &= \frac{e^{-\omega}\,\Gamma\left(\frac{\xi-1}{2}\right)}{2\left(\frac{\xi}{2c\Re}\right)^{\frac{\xi-1}{2}}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Tafel 1.

Reihenansatz für $x \geqq 0$:

$$w(x) = \lambda + \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}\log_e(1+Ae^{4x}) + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}ix}(1+Ae^{4x})^{-i/3}\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\left(\frac{Ae^{4x}}{1+Ae^{4x}}\right)^k +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} B^\nu e^{-\nu[mx+ne^{2/3x}(1+Ae^{4x})^{1/3}]}\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\frac{2}{3}\mu x}(1+Ae^{4x})^{-\mu/3}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_{\nu\mu\varkappa}\left(\frac{Ae^{4x}}{1+Ae^{4x}}\right)^\varkappa;$$

λ, A, B = Integrationskonstanten.

$$\frac{1}{\Re} = e^{\lambda/2}A^{2/3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x-w}\,dx.$$

$$a_{10} = \frac{8}{21}\left(3+\frac{2}{\xi}\right)ce^{\lambda/2}; \qquad a_{20} = \frac{32}{441}\left(3+\frac{2}{\xi}\right)^2 c^2 e^{\lambda};$$

$$a_{30} = \frac{32}{441}\,\frac{1485+1550/\xi}{1701}\left(3+\frac{2}{\xi}\right)^2 c^3 e^{\frac{3}{2}\lambda};$$

$$a_{40} = \frac{32}{441}\,\frac{1559{,}057+3997{,}143/\xi+2867{,}848/\xi^2}{1701}\left(3+\frac{2}{\xi}\right)^2 c^4 e^{2\lambda};$$

$$a_{11} = -\frac{16}{21}\left(5+\frac{22}{\xi}\right)ce^{\lambda/2}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} = -\left(\frac{8}{3}+\frac{16}{\xi}\right)ce^{\lambda/2}.$$

$$m = \frac{50-9\xi}{14}; \qquad n = \frac{9\xi e^{-\lambda/2}}{16c}.$$

$$b_{100} = 1; \qquad b_{200} = {}^1/_4;$$

$$b_{110} = -\frac{110468-12996\xi+81\xi^2}{1764\xi}ce^{\lambda/2};$$

$$b_{120} = -(354{,}35-103{,}9394\xi+6{,}7965\xi^2-0{,}0115\xi^3)\frac{c^2e^{\lambda}}{\xi^2} -$$

$$-b_{110}(97{,}7664-10{,}6531\xi+0{,}0459\xi^2)\frac{ce^{\lambda/2}}{2\xi};$$

$$b_{210} = \frac{b_{110}}{2} - \frac{9+64/\xi}{24}ce^{\lambda/2}.$$

---

wobei $\Gamma(\ )$ wie üblich die Gammafunktion bedeutet. Für die gesuchte dimensionslose Funktion $f(\chi, Re)$ wird dann

$$f(\chi, Re) = \frac{F(k,t)}{EL} = \frac{e^{-w}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w}\,dx}, \tag{4.13}$$

$$\chi = kL = e^{x}\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-w}\,dx}, \tag{4.14}$$

und die *Reynolds*zahl der Turbulenz beträgt

$$Re = \Re\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w}\,dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-w}\,dx}}. \tag{4.15}$$

Für das Spektrum können wir im Falle $Re = 0$, ausgehend von (4.7) und unter Benutzung von (4.12), eine geschlossene Formel angeben:

$$\lim_{Re\to 0} f(\chi) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\xi-1}{2}\right)}\left(\frac{\chi}{a}\right)^{\xi-1} e^{-\left(\frac{\chi}{a}\right)^2} \tag{4.16}$$

mit

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{\xi-1}{2}\right)}{\Gamma(\xi/2)}.$$

Tafel 2.

Reihenansatz für $x \leqq 0$:

1) $\xi \neq 2$:

$$\bar{w}(x) = \omega - (\xi - 1)x + De^{2x} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{i(1+\xi/2)x} \sum_{k=0}^{\infty} d_{ik} e^{2kx};$$

ω, D = Integrationskonstanten.

$$D = \frac{\xi}{2c}\left[\frac{1}{\Re} + \lim_{\varepsilon \to -\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{w+x}{2}}\, dx + \frac{e^{(\xi/2-1)\varepsilon}}{\xi/2-1}\, e^{-\omega/2}\right)\right].$$

$$d_{10} = -\frac{2(2+3\xi)\xi}{(\xi-2)(2+\xi)^2}\,\frac{e^{-\omega/2}}{c};$$

$$d_{20} = -\frac{8(2+3\xi)(3+2\xi)\xi}{11(\xi-2)(2+\xi)^4}\,\frac{e^{-\omega}}{c^2};$$

$$d_{30} = -\frac{(2+3\xi)\xi^2}{(1+\xi)(\xi-2)^2(2+\xi)^7}\,\frac{24+1008\xi+1546\xi^2+86\xi^3+\xi^4}{99}\,\frac{e^{-\frac{3}{2}\omega}}{c^3};$$

$$d_{11} = -\frac{\xi(24+2\xi-3\xi^2)}{(2+\xi)(4+\xi)(6+\xi)^2}\,D\,\frac{e^{-\omega/2}}{c}.$$

2) $\xi = 2$:

$$\bar{w}(x) = \omega - x + e^{2x}(D + f_1 x) + \sum_{i=2}^{\infty} e^{2ix} \sum_{k=0}^{k=i-1} f_{ik}\, x^k;$$

ω, D = Integrationskonstanten.

$$D = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{\Re} + \lim_{\varepsilon \to -\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{w+x}{2}}\, dx + \varepsilon e^{-\omega/2}\right)\right].$$

$$f_1 = -\frac{e^{-\omega/2}}{c};$$

$$f_{20} = -\frac{65\,e^{-\omega}}{576\,c^2} + \frac{7}{48}\,\frac{De^{-\omega/2}}{c};$$

$$f_{21} = -\frac{7}{48}\,\frac{e^{-\omega}}{c^2}.$$

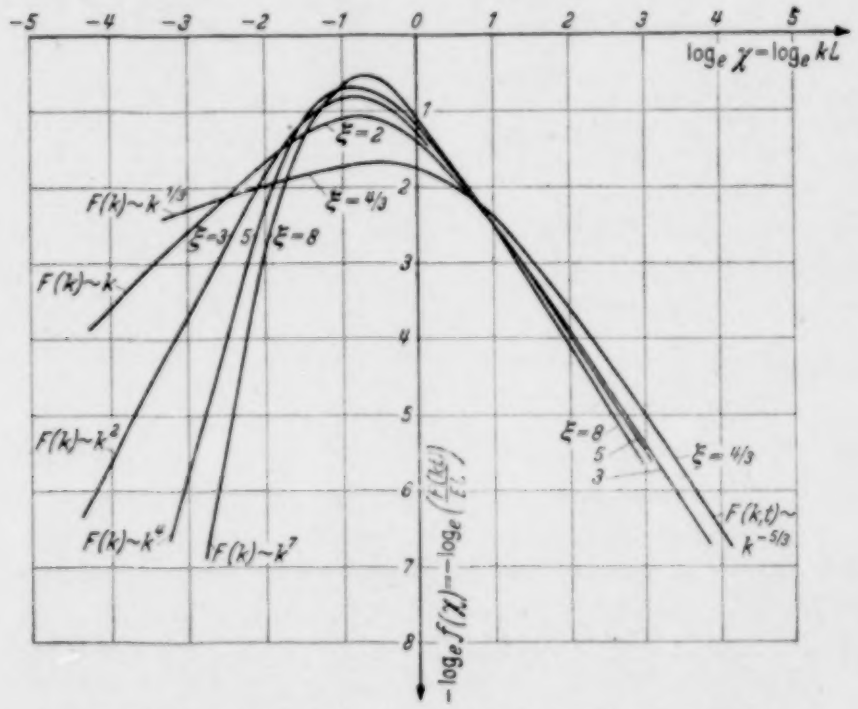


Abb. 2. Gleichgewichtsspektren für $Re = \infty$ und verschiedene Parameter ξ.

5. Ergebnisse der Rechnung. Für eine Darstellung der Ergebnisse wird die Größe $f(\chi, Re) = F(k,t)/EL$ über $\chi = kL$ im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Abb. 2 gibt zunächst einige Spektren für unendlich große *Reynolds*zahl, aber mit verschiedenem Parameter ξ wieder. Der Einfluß der verschiedenen ξ wirkt sich hauptsächlich im Gebiet kleiner Wellenzahlen aus, während für große k-Werte alle Kurven in das Gesetz $F(k,t) - k^{-5/3}$ übergehen. Das asymptotische Verhalten bei kleinen k-Werten $F(k) - k^{\xi-1}$ ist dabei nicht davon abhängig, ob der benutzte Ausdruck (3.16) für die Turbulenzzähigkeit in dieser Form hier noch berechtigt ist.

Der Einfluß der *Reynolds*zahl Re wird in Abb. 3 für den Fall $\xi = 2$ (Abklinggesetz $E \sim t^{-1}$) veranschaulicht. Bei endlicher *Reynolds*zahl haben alle Spektren für große *k-Werte* die von

W. Heisenberg[1] gefundene Asymptote $F(k,t) \sim k^{-7}$. Der Darstellung Abb. 3 ist zu entnehmen, daß die Funktion $f(\chi, Re)$ bei großen *Re*-Zahlen im Bereich kleinerer χ-Werte fast unabhängig von der *Re*-Zahl ist. Dieses Verhalten trifft für alle anderen ξ-Werte ebenfalls zu. Damit finden wir die in Abschnitt 3 getroffene Voraussetzung dafür, daß die Ableitung $\partial f(\chi, Re)/\partial Re$ in (3.12) außer acht gelassen werden darf, weitgehend erfüllt. Nur im Gebiet großer k-Werte, wo etwa das Spektrum in das Gesetz $F(k,t) \sim k^{-7}$ abbiegt, bleibt $\partial f(\chi, Re)/\partial Re$ nicht mehr klein. Für große *Reynoldszahlen* leitet man z. B. aus (4.5) ab

$$\lim_{Re\to\infty,\, k\to\infty} Re \frac{\partial F(k,t)}{\partial Re} = 4F(k,t) .$$

Zum Vergleich sei der Wert für $k \longrightarrow 0$ bei einer mittleren *Re*-Zahl ($Re \approx 100$) und mit $\xi = 2$ gegenübergestellt:

$$\lim_{k\to 0} Re \frac{\partial F(k)}{\partial Re} \approx -0{,}1\, F(k) .$$

Tatsächlich wird das Spektrum für endliche *Reynoldszahlen* in diesem Gebiet durch die Beziehung (3.17) nicht ganz richtig wiedergegeben. Die Abweichungen vom wirklichen Verlauf sind jedenfalls nicht erheblich; für die Grenzfälle $Re = \infty$ und $Re = 0$ verschwinden sie. Im übrigen hat das Nichterfülltsein der genauen Beziehung (3.12) in diesem Gebiet keinen Einfluß auf das übrige Spektrum. Man könnte natürlich daran denken, diese als erste Näherung aufzufassende Lösung von (3.17) durch Einsetzen in (3.12) iterativ zu verbessern. Dies wurde bisher jedoch nicht für notwendig erachtet und deshalb nicht versucht.

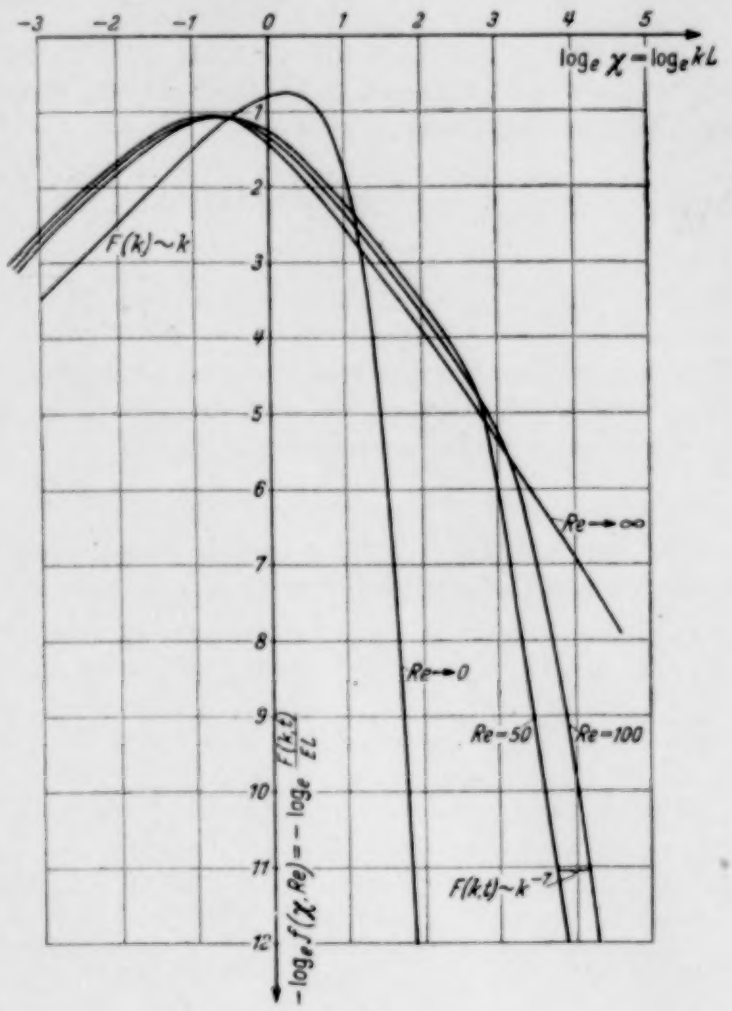


Abb. 3. Gleichgewichtsspektren für $\xi = 2$ ($E \sim t^{-1}$) und verschiedene *Reynoldszahlen*.

Sehr wichtig ist die Frage nach dem zeitlichen Abklingen der Gesamtenergie, die bei bekanntem Spektrum beantwortet werden kann. Aus (2.3) ergibt sich

$$S = \nu \frac{E}{L^2} \int_0^\infty 2 f(\chi, Re)\, \chi^2\, d\chi . \tag{5.1}$$

In Abb. 4 ist das Integral $\int_0^\infty 2f(\chi, Re)\chi^2 d\chi$, das aus den ermittelten Gleichgewichtsverteilungen für $\xi = 2$ berechnet wurde, über der *Reynoldszahl* logarithmisch dargestellt. Bei großen *Reynoldszahlen* ist dieser Integralausdruck proportional zu *Re*, so daß hier der bekannte Zusammenhang

$$\lim_{Re\to\infty} \frac{dE}{dt} \sim -\frac{E^{3/2}}{L} \tag{5.2}$$

besteht. Bei kleineren *Reynoldszahlen* ergeben sich Abweichungen von diesem Zusammenhang und für den Grenzfall $Re \longrightarrow 0$ wird

$$\lim_{Re\to 0} \frac{dE}{dt} \sim -\nu \frac{E}{L^2} . \tag{5.3}$$

Für andere Parameter ξ ist der Verlauf des Integrals über *Re* ganz ähnlich wie in Abb. 4.

[1] Fußnote 1 von S. 60.

Wenn man das Dissipationsgesetz ermitteln will, braucht man zunächst den Zusammenhang zwischen E, L und Re. Die Differentiation der in logarithmischer Form geschriebenen Gleichung (2.6) ergibt

$$\frac{d\log Re}{d\log E} = \frac{1}{2} + \frac{d\log L}{d\log E} = \frac{1}{2} - \zeta\,. \tag{5.4}$$

Setzt man für ζ den in (3.10) ermittelten Wert ein, so kann man (5.4) geschlossen integrieren. Die Werte E und L lassen sich dann für jede *Reynolds*zahl berechnen, wenn sie für irgendeine Re-Zahl $Re = Re_0$ bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned} E(Re) &= E(Re_0)\left(\frac{Re}{Re_0}\right)^{\frac{2\xi}{\xi-2}}\left[\lim_{\chi\to 0}\frac{f(\chi, Re_0)}{f(\chi, Re)}\right]^{\frac{2}{\xi-2}},\\ L(Re) &= L(Re_0)\left(\frac{Re_0}{Re}\right)^{\frac{2}{\xi-2}}\left[\lim_{\chi\to 0}\frac{f(\chi, Re)}{f(\chi, Re_0)}\right]^{\frac{1}{\xi-2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Mit den so bekannten Zusammenhängen ist die Integration von (5.1) möglich, die den zeitlichen Ablauf der Dissipation ergibt. Für die Grenzfälle $Re\to\infty$ und $Re\to 0$ besteht nach (3.4) der einfache Zusammenhang zwischen L und E

$$L \sim E^{-\xi}, \tag{5.6}$$

da hier die Funktion $f(\chi)$ für $\chi\to 0$ nicht mehr von Re abhängt. Das Abklinggesetz kann durch Einsetzen von (5.6) in (5.2) und (5.3) ermittelt und in geschlossener Form angegeben werden:

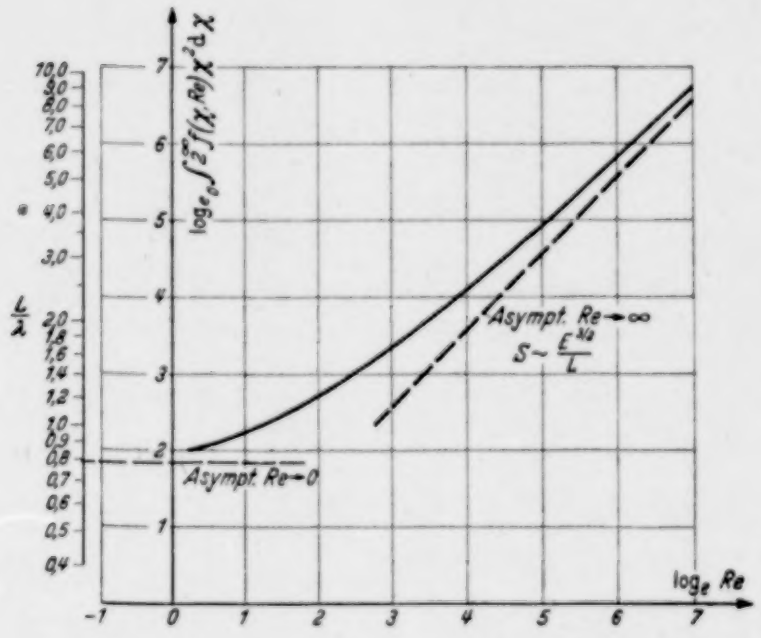


Abb. 4. Dissipation abhängig von der *Reynolds*zahl für $\xi = 2$.

	lim $Re\to\infty$	lim $Re\to 0$
E	$\sim t^{-\frac{2\xi}{2+\xi}}$	$\sim t^{-\xi/2}$
L	$\sim t^{\frac{2}{\xi+\xi}}$	$\sim \sqrt{t}$
Re	$\sim t^{\frac{2-\xi}{2+\xi}}$	$\sim t^{\frac{2-\xi}{4}}$

Der gesamte Abklingverlauf der Energie von großen Re-Zahlen beginnend bis $Re\to 0$ kann nur durch numerische Integration gewonnen werden. Das Abklinggesetz wird durch ξ wesentlich beeinflußt.

Für den Fall $\xi = 2$ gibt (3.17) die exakte Lösung von (3.12) an, wie man leicht sieht. Nach (3.10) wird exakt $\zeta = 1/2$ und aus (3.6) folgt, daß die *Reynolds*zahl während des ganzen Abklingvorganges konstant bleibt. Es gilt das Dissipationsgesetz $E \sim t^{-1}$ und die mittlere Wellenlänge wächst wie $L \sim \sqrt{t}$. Das Spektrum bleibt für $\xi = 2$ beim Abklingen vollkommen ähnlich. Doch scheint kein hinreichender Grund vorzuliegen, dem Fall $\xi = 2$ wegen dieser Eigenschaft eine bevorzugte Stellung einzuräumen. Für das Verhalten des Spektrums bei den größten Wellenlängen, das ja durch die Größe ξ beschrieben wird, sind nämlich andere physikalische Vorgänge verantwortlich, als die Einwirkung der kinematischen Zähigkeit.

An Hand von (3.7) kann man den Abklingvorgang der Funktion $F(k,t)$ in den einzelnen Wellenbereichen quantitativ verfolgen. Mit C nach (3.5) läßt sich (3.7) für eine bestimmte Wellenzahl $k = \bar{k}$ über ein begrenztes Zeitintervall integrieren, wenn man $\zeta \approx 1/\xi$ setzt:

$$F(k,t) \sim E^q \text{ mit } q = 1 - \frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{\bar{k}}{F(\bar{k},t)}\frac{\partial F(\bar{k},t)}{\partial \bar{k}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{Re}{F(\bar{k},t)}\frac{\partial F(\bar{k},t)}{\partial Re}\,. \tag{5.7}$$

$F(\bar{k},t)$ nimmt also mit einer von 1 verschiedenen Potenz von E ab. Der Exponent hängt dabei

hauptsächlich von $\dfrac{\bar{k}}{F(\bar{k},t)}\,\dfrac{\partial F(\bar{k},t)}{\partial \bar{k}}$ ab. In den verschiedenen k-Bereichen gilt für große *Reynolds*-zahlen:

$\bar{k}$ liegt im Gebiet:	$\bar{F}(k,t)$
$\lim\limits_{k\to 0} F(k) \sim k^{\xi-1}$	$\approx$ konst
$\max F(k,t)\left[\dfrac{\partial F(k,t)}{\partial k}=0\right]$	$\sim E^{1-1/\xi}$
$F(k,t) \sim k^{-5/3}$	$\sim E^{1+2/3\xi}$
$F(k,t) \sim k^{-7}$	$\sim E^{3+2/\xi}$

Man ersieht hieraus, daß die kinetische Energie der kurzen Wellen schneller abstirbt als die der langen. Die spektrale Funktion $F(\bar{k},t)$ der Wellenzahl $\bar{k}$, welche anfänglich im Gebiet $F(k) \sim k^{\xi-1}$ liegen möge, ändert ihre Größe zunächst nur wenig. Nach einer gewissen Zeit, wenn die Energie des Bereiches $k>\bar{k}$ entsprechend abgeklungen ist, wird bei $\bar{k}$ etwa das Maximum der Spektrumskurve liegen und die Energie jetzt etwa wie $F(\bar{k},t) \sim E^{1-1/\xi}$ kleiner werden. Nach Ablauf einer weiteren Abklingzeit, in welcher wieder hauptsächlich die Energie des Bereiches $k>\bar{k}$ abnimmt, wird dann bei $\bar{k}$ das Gesetz $F(k,t) \sim k^{-5/3}$ gelten und $F(\bar{k},t)$ nun wie $E^{1+2/3\xi}$ abnehmen. Nach weiterem Abklingen der in $k>\bar{k}$ enthaltenen Energie wird dann das Spektrum in der Nähe von $\bar{k}$ schließlich dem Gesetz $F(k,t) \sim k^{-7}$ entsprechen und nun nach der Beziehung $F(\bar{k},t) \sim E^{3+2/\xi}$ verschwinden. Sich über diesen typischen Abklingvorgang der Funktion $F(\bar{k},t)$ einer bestimmten Wellenzahl Klarheit zu verschaffen, ist für die Beurteilung des Turbulenzverhaltens und die zeitliche Veränderung der spektralen Verteilung wesentlich.

Um die Kenntnisse über das Einstellen der Verteilung des statistischen Gleichgewichtes zu vertiefen und eine Vorstellung von den hierzu erforderlichen Zeiten zu bekommen, soll die Frage untersucht werden, wie sich das Spektrum gegenüber Störungen der Gleichgewichtsverteilung verhält. Während in Abschnitt **3** das Gleichungssystem (3.11), (3.15) und (3.16) benützt wurde, um bei vorgegebenem $\partial F(k,t)/\partial t$ das Spektrum zu ermitteln, kann auch umgekehrt damit untersucht werden, wie sich ein im Zeitpunkt t_0 vorhandenes Spektrum zeitlich ändert. Setzt man (3.16) in (3.15) und diesen Ausdruck in (3.11) ein und differentiiert nach k, so erhält man

$$-\frac{\partial F(k,t)}{\partial t} = \left[\nu + \varkappa \int_k^\infty \sqrt{\frac{F(k'',t)}{k''^3}}\, dk''\right] 2F(k,t)k^2 - \varkappa \sqrt{\frac{F(k,t)}{k^3}} \int_0^k 2F(k',t)k'^2 dk' . \qquad (5.8)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man bei gegebenem Spektrum die zeitliche Änderung von $F(k,t)$ verfolgen.

Wir nehmen nun eine überall stetige Funktion $F(k,t)$ an, die beispielsweise der Gleichgewichtsbedingung (3.12) genügen möge, jedoch sei in dem Bereich zwischen $\bar{k}$ und $\bar{k}+dk$ eine unstetige Störung $\Delta F(\bar{k},t)$ vorhanden. Die Integrale in (5.8) ändern ihre Beträge infolge der Störung $\Delta F(\bar{k},t)$ nicht, da die Breite der Störung infinitesimal angenommen wurde. Der Wert $\partial F(k,t)/\partial t$ bleibt im ganzen Wellenbereich unbeeinflußt von der Störung bei $\bar{k}$, mit Ausnahme an der Stelle $\bar{k}$ selbst. Hier wird

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\left[F(\bar{k},t)+\Delta F(\bar{k},t)\right] = \left[\nu + \varkappa \int_{\bar{k}}^\infty \sqrt{\frac{F(k,t)}{k^3}}\, dk\right] 2\left[F(\bar{k},t)+\Delta F(\bar{k},t)\right]\bar{k}^2 - \\ - \varkappa \sqrt{\frac{F(\bar{k},t)+\Delta F(\bar{k},t)}{\bar{k}^3}} \int_0^{\bar{k}} 2F(k,t)k^2\, dk . \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Nun sei ferner $\Delta F(\bar{k},t) \ll F(\bar{k},t)$. Subtrahiert man von (5.9) den Wert $-\partial F(\bar{k},t)\partial/t$ nach (5.8) und eliminiert außerdem den Ausdruck für die Zähigkeit $\left(\nu + \int_{\bar{k}}^\infty \ldots dk\right)$ mit Hilfe von (5.8), so erhält man folgende Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Störung $\Delta F(\bar{k},t)$:

$$-\frac{\partial \Delta F(\bar{k},t)}{\partial t} = \frac{\Delta F(\bar{k})}{F(\bar{k},t)}\left[-\frac{\partial F(\bar{k},t)}{\partial t} + \frac{\varkappa}{2}\sqrt{\frac{F(\bar{k},t)}{\bar{k}^3}} \int_0^{\bar{k}} 2F(k,t)k^2\, dk\right]. \qquad (5.10)$$

Aus dieser Beziehung erkennt man unmittelbar, daß

$$-\frac{1}{\Delta F(\bar{k},t)}\frac{\partial \Delta F(\bar{k},t)}{\partial t} > \frac{-1}{F(\bar{k},t)}\frac{\partial F(\bar{k},t)}{\partial t}$$

ist. Damit ist bereits der Nachweis erbracht, daß eine Störung $\Delta F(\bar{k},t)$ schneller abklingt als die Funktion $F(\bar{k},t)$ im gleichen Wellenbereich.

Die Gleichung (5.10) läßt sich leicht integrieren:

$$\Delta F(k,t) \sim F(\bar{k},t)\exp\left[-\frac{\varkappa}{2}\int^{t}\frac{\int_0^{\bar{k}} 2F(k,t)k^2\,dk}{\sqrt{F(\bar{k},t)\,\bar{k}^3}}\,dt\right]. \tag{5.11}$$

Eine kleine Störung ΔF an der Stelle $\bar{k}$ klingt zeitlich wie die ungestörte Funktion F an dieser Stelle, multipliziert mit einer Exponentialfunktion, ab, wobei die Exponentialfunktion natürlich das Entscheidende ist. Nehmen wir z. B. eine Störung bei einem nicht zu kleinen $\bar{k}$, bei welchem das Gesetz $F(k,t) \sim k^{-5/3}$ gilt, und nicht zu kleiner *Reynolds*zahl an, so wird dort mit (3.12)

$$\left[\nu+\varkappa\int_{\bar{k}}^{\infty}\sqrt{\frac{F(k,t)}{k^3}}\,dk\right]\int_0^{\bar{k}}2F(k,t)k^2dk \approx \frac{3\varkappa}{4}\sqrt{\frac{F(\bar{k},t)}{\bar{k}}}\int_0^{\bar{k}}2F(k,t)k^2dk \approx CE\,.$$

Daraus folgt mit (5.7)

$$\frac{\varkappa}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\int_0^{\bar{k}}2F(k,t)k^2\,dk}{\sqrt{F(\bar{k},t)\,\bar{k}^3}}\,dt = \frac{\xi}{f(\bar{\chi})\,\bar{\chi}}\left\{\left[\frac{E(t_0)}{E(t)}\right]^{2/3\,\xi}-1\right\},$$

wenn mit t_0 der Zeitpunkt bei Beginn der Störung gekennzeichnet wird, und $\bar{\chi}=\bar{k}L(t_0)$ ist. Also ergibt sich für eine kleine Störung im Bereich des $k^{-5/3}$-Gesetzes das Abklinggesetz

$$\Delta F(\bar{k},t) = \Delta F(\bar{k},t_0)\left[\frac{E(t)}{E(t_0)}\right]^{1+2/3\,\xi}\exp\left[-\frac{\xi}{f(\bar{\chi})\,\bar{\chi}}\left\{\left[\frac{E(t_0)}{E(t)}\right]^{2/3\,\xi}-1\right\}\right]. \tag{5.12}$$

Man kann leicht abschätzen, daß z. B. innerhalb eines Zeitraumes, in welchem die kinetische Energie auf etwa die Hälfte abklingt, eine Störung $\Delta F(\bar{k},t)$ bis auf einen ganz unbedeutenden Rest verschwindet.

Für sehr kleine k-Werte, bei denen $F(k) \sim k^{\xi-1}$ zeitlich konstant bleibt, ergibt sich für eine kleine Störung das Abklinggesetz

$$\Delta F(\bar{k},t) = \Delta F(\bar{k},t_0)\exp\left[-\frac{\varkappa}{2(2+\xi)}\sqrt{F(\bar{k})\,\bar{k}^3}\,(t-t_0)\right]. \tag{5.13}$$

Aus einer zahlenmäßigen Abschätzung entnimmt man, daß eine Störung im Gebiete kleiner k-Werte nur sehr langsam abklingt.

Was hier für eine kleine örtliche Störung gezeigt wurde, gilt auch im wesentlichen für solche Störungen, die sich über einen endlichen k-Bereich erstrecken. Die Beträge der Integrale in (5.8) werden weniger stark durch Abweichungen von der Gleichgewichtsfigur geändert als die Beträge von $F(k,t)$ im Bereich der Störungen. Die Größe $\partial F(k,t)/\partial t$ wird also hauptsächlich nur in dem k-Bereich durch die Störungen beeinflußt, an dem die Störungen selbst auftreten. Man kann aus diesen Ergebnissen folgern, daß sich in einem breiten k-Bereich ziemlich rasch ein Gleichgewichtszustand für den Energieaustausch einstellt. Nur im Gebiet kleiner k-Werte behält das Spektrum längere Zeit die Form bei, die es im Augenblick seiner Entstehung hat. Höchstens die gröbsten Unregelmäßigkeiten gleichen sich hier aus.

Es sollen nun noch einige Beziehungen der hier eingeführten Größen zu den Größen angegeben werden, die in dem in England verfaßten Arbeiten benutzt werden. Die als Größe der kleinsten Turbulenzelemente anzusehende Länge λ beträgt

$$\lambda^2 = \frac{10\,L^2}{\int_{-\infty}^{\infty}2f(\chi,Re)\,\chi^2\,d\chi}. \tag{5.14}$$

In Abb. 4 ist für das Verhältnis L/λ ein Ordinatenmaßstab eingezeichnet. Die durch Integration der Korrelationsfunktion $f(r)$ erhaltene, als „integral scale" bezeichnete Länge $\int_0^\infty f(r)\,dr$ unterscheidet sich von der hier eingeführten mittleren Wellenlänge L nach (2.7) nur um einen konstanten Zahlenfaktor

$$\int_0^\infty f(r)\,dr = \frac{3\pi}{4} L. \tag{5.15}$$

Die Funktion $f(r)$ beschreibt dabei die Korrelation zwischen zwei parallelen Geschwindigkeitskomponenten an zwei Punkten, die auf einer parallel zu diesen Geschwindigkeitskomponenten verlaufenden Linie im Abstand r voneinander entfernt liegen.

6. Berücksichtigung der Loitsianskyschen Invarianten. Über die Größe des auftretenden Parameters ξ wurden aus den bisherigen Überlegungen keine theoretischen Aufschlüsse erhalten, außer daß $\xi > 1$ sein muß, um brauchbare Lösungen zu erhalten. Nun wurde eine sehr wichtige Bedingung, die sogenannte *Loitsianskysche* Invariante, noch nicht berücksichtigt. An Hand der von *Th. v. Kármán* und *L. Howarth*[1] aus den *Navier-Stokes*schen Bewegungsgleichungen hergeleiteten Beziehung zwischen der Doppel- und Dreifachkorrelationsfunktion läßt sich nämlich zeigen, daß der Ausdruck[2]

$$A = \frac{E}{3} \int_0^\infty f(r) r^4 dr \tag{6.1}$$

während des Abklingens konstant bleiben muß. Dabei ist $f(r)$ die bereits bei (5.15) näher definierte Korrelationsfunktion. Setzt man für die Korrelationsfunktion die von *W. Heisenberg* angegebene Beziehung ein, so nimmt A folgende Form an:

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty F(k,t) \frac{\sin kr - kr \cos kr}{k^3} r\,dk\,dr. \tag{6.2}$$

Der Betrag dieses Doppelintegrals hängt vom Verlauf von $F(k,t)$ in der Nähe $k=0$ ab. *G. K. Batchelor* hat nachgewiesen, daß das Spektrum in der Nähe $k=0$ die Form $F(k) \sim k^4$ haben muß. Es zeigt sich also, daß A nur für $\xi = 5$ einen endlichen Wert hat. Für $\xi > 5$ wird $A = 0$. Dies hätte nach (6.1) zur Voraussetzung, daß $f(r)$ in einem gewissen r-Bereich negativ wird, was mit vorliegenden Versuchsergebnissen im Widerspruch steht. Für $\xi < 5$ ergibt sich andererseits $A = \infty$; dies erscheint aber physikalisch ebenfalls unwahrscheinlich. Für voll ausgebildetes statistisches Gleichgewicht im gesamten Wellenbereich $0 < k < \infty$, das als asymptotischer Zustand für eine beliebig entstandene Turbulenz gelten soll, scheint also nur der Parameter $\xi = 5$ in Betracht zu kommen, wofür noch weitere Überlegungen sprechen. Damit liegen die Eigenschaften der im statistischen Gleichgewicht befindlichen Turbulenz fest. Für große *Reynolds*zahlen ergibt sich das Dissipationsgesetz $E \sim t^{-10/7}$, welches bereits von *A. N. Kolmogoroff*[3] gefunden wurde; für verschwindende *Reynolds*zahlen gilt $E \sim t^{-5/2}$ in Übereinstimmung mit theoretischen und experimentellen Ergebnissen von *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend*[4]. Der gesamte Ablauf des Abklingens läßt sich für diesen ausgebildeten Gleichgewichtszustand nach den angegebenen Beziehungen rechnerisch genau verfolgen.

Bei Versuchen im Windkanal scheint die Einstellung des statistischen Gleichgewichtes für den gesamten Wellenbereich $0 < k < \infty$ ziemlich langsam vor sich zu gehen, so daß man nach vorliegenden Erfahrungen erst in Abständen von einigen hundert Maschenweiten vom Turbulenzgitter einen ausgebildeten Gleichgewichtszustand vorfindet. Dabei ist es aber theoretisch nicht begründet, daß sich dieser Zustand erst bei kleinen *Reynolds*zahlen einstellt, wie es bei den Versuchen von *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend* der Fall ist. Man sollte vielmehr erwarten, daß bei Turbulenz, die mit genügend hohen *Reynolds*zahlen beginnt, das voll ausgebildete Gleichgewicht schon bei entsprechend hohen *Re*-Zahlen praktisch erreicht wird.

Die experimentellen Untersuchungen lassen nun weiter darauf schließen, daß sich bei Turbulenz, die im Luftstrom von einem Gitter erzeugt wird, schon nach verhältnismäßig kurzer

---

[1] *Th. v. Kármán* und *L. Howarth*, Proc. Roy. Soc. A 164 (1938) S. 192.
[2] *G. K. Batchelor*, Quarterly Applied Mathematics IV (1948) S. 97.
[3] Vgl. die zuletzt zitierte Arbeit von *Batchelor*.
[4] *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend*, Proc. Roy. Soc. A 194 (1948) S. 527.

Einstellzeit ein teilweise ausgebildeter Gleichgewichtszustand einstellt, der sich mitunter eine Weile fast unverändert hält. In diesem Zustand läßt sich das Spektrum für den Bereich $k>\vartheta$ mit guter Annäherung ebenfalls durch eine Gleichgewichtsverteilung nach (3.12) mit einem passend gewählten $\xi(\xi \neq 5)$ rechnerisch beschreiben. Dabei ist ϑ jedoch so klein ($\vartheta \ll 1/L$), daß die im Bereich $0<k<\vartheta$ enthaltene kinetische Energie $\int_0^{\vartheta} F(k)\,dk$ klein gegen die Gesamtenergie nach (2.1) ist und deshalb keinen Einfluß auf das Gesamtverhalten der Turbulenz hat. Für $k<\vartheta$ gibt die Rechnung das wirkliche Spektrum nicht richtig wieder. Die allgemeinen Eigenschaften der Turbulenz sind in diesem Stadium noch wesentlich von den Bedingungen abhängig, unter denen sie erzeugt wurde, also z. B. von der Form des Gitters, was durch entsprechende Wahl des Parameters ξ zu berücksichtigen ist. Beim Vergleich mit Messungen kann man ξ beispielsweise so festlegen, daß das rechnerische Abklinggesetz mit dem experimentell beobachteten übereinstimmt. Die Messungen von *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend*[1] ergaben mit ziemlicher Genauigkeit in diesem Stadium ein Abklingen, das dem Parameter $\xi=2\,(E\sim 1/t)$ entspricht. Da jedoch diese Messungen alle mit geometrisch vollkommen ähnlichen Gittern vorgenommen wurden, besteht kein Anlaß, diese Ergebnisse zu verallgemeinern. Den von *Th. v. Kármán*[2] veröffentlichten Messungen ist zu entnehmen, daß die Form des Gitters einen Einfluß auf das Abklinggesetz im Anfangsstadium ausübt. Im übrigen ist nicht sicher, ob sich in allen Fällen ein teilweise ausgebildeter Gleichgewichtszustand solcher Art bildet, daß er über einen längeren Zeitraum durch ein konstantes ξ beschrieben werden könnte. Es ist denkbar, daß weitere experimentelle Untersuchungen noch manches interessante Ergebnis über diese Frage liefern werden.

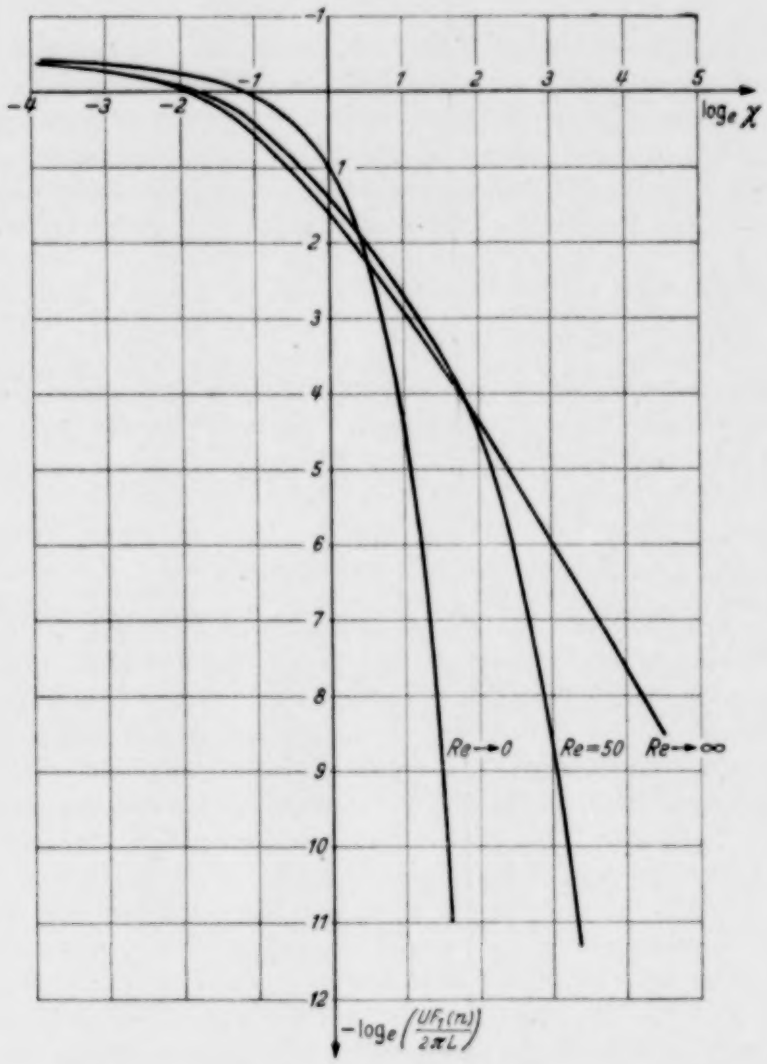


Abb. 5. Gleichgewichtsspektren von Windkanalturbulenz.
$\xi=2\ \ (E\sim t^{-1})$.

7. Vergleich mit Messungen im Luftstrom hinter einem Gitter. Durch die Funktion $F(k,t)$ sind die statistischen Raummittelwerte der augenblicklichen Geschwindigkeitsschwankungen der im Mittel als ruhend zu denkenden Flüssigkeit beschrieben. Bei den Messungen im Luftstrom hinter einem Gitter wird die Strömung mit ziemlich großer Geschwindigkeit U am Meßort vorbeigeführt und dabei der Zeitmittelwert der parallel zu U wirkenden Geschwindigkeitskomponenten u_1 gemessen. Oder, um beim Bilde der im Mittel ruhenden Strömung zu bleiben, die Meßapparatur wird mit der Geschwindigkeit U geradlinig durch das Strömungsgebiet geführt, und man mißt dabei die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Bewegungsrichtung der Apparatur. Die spektrale Verteilung der Komponenten $\overline{u_1^2}$ über die Frequenz n

[1] *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend*, Proc. Roy. Soc. A 193 (1948) S. 539.

[2] *Th. v. Kármán*, Some Remarks on the statistical Theory of Turbulence. V. International Congress for Applied Mechanics (1938) S. 437.

wird durch die Funktion $F_1(n)$ beschrieben, die wie folgt definiert ist:

$$\overline{u_1^2} = \frac{E}{3} = \overline{u_1^2} \int_0^\infty F_1(n)\, dn\,, \tag{7.1}$$

dabei ist $n = \frac{kU}{2\pi}$. Die Funktion $F_1(n)$ errechnet sich nach *Heisenberg* aus $F(k,t)$ zu

$$U F_1(n) = \frac{3\pi}{E} \int_{k_1}^\infty \frac{k^2 - k_1^2}{k^3} F(k,t)\, dk\,. \tag{7.2}$$

Abb. 5 zeigt einige Kurven $UF_1(n)/2\pi L$ über $\chi = 2\pi L n/U$ im logarithmischen Maßstab für $\xi = 2\ (E \sim 1/t)$.

Beim Vergleich mit Messungen hat man außer ξ noch zwei Parameter, über die man frei verfügen kann, nämlich die Größe L der Turbulenz und die Konstante $\varkappa$. Mit anderen Worten, man kann die *Re*-Zahl willkürlich wählen und außerdem den Nullpunkt auf einer unter 45° geneigten Geraden verschieben. Die Größe L hat man so festzulegen, daß die gerechnete Kurve im Bereich kleinerer k-Werte mit den Messungen übereinstimmt. Aus der Anpassung der Rechnung an die Versuchsergebnisse beim Übergang in das Gesetz $F(k,t) \sim k^{-7}$ ergibt sich der Wert $\varkappa$.

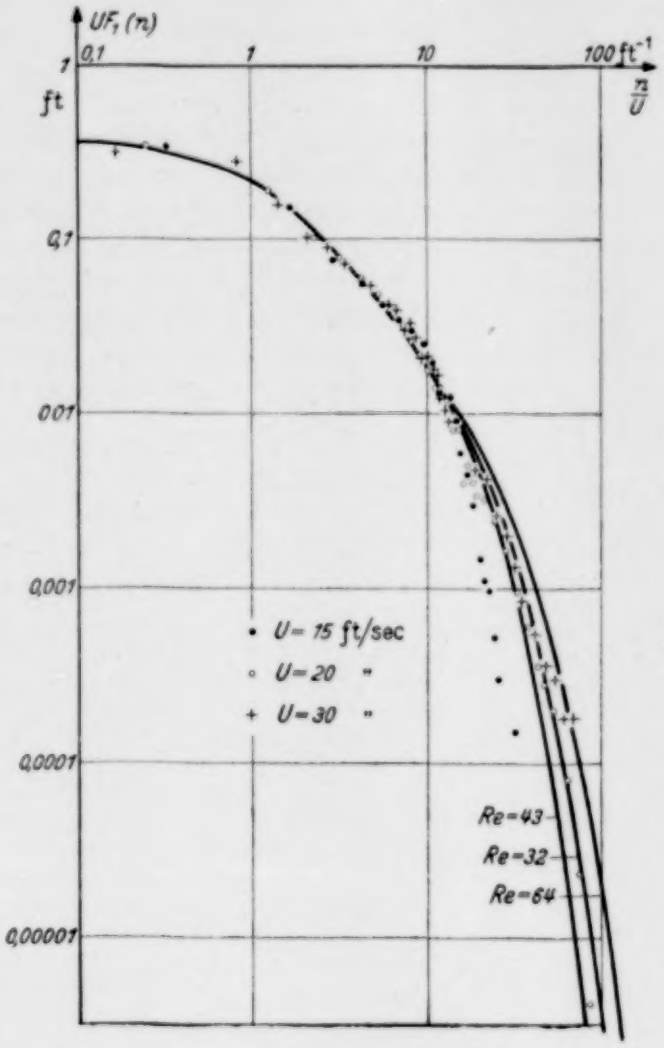


Abb. 6. Spektrum von Windkanalturbulenz nach Rechnung und Messung.

Aus Abb. 6 ersieht man, daß die Rechnung in sehr gute Übereinstimmung mit den Messungen nach *L. F. G. Simmons* und *C. Salter*[1] zu bringen ist. Nach vorliegenden Versuchserfahrungen[2] liegt der Meßort (Abstand vom Gitter = 27 Maschenweiten) in einem Bereich, in welchem noch kein voll ausgebildeter Gleichgewichtszustand besteht, das Spektrum also noch in gewisser Weise von den Anfangsbedingungen abhängt. Da das Dissipationsgesetz für die Messungen von *Simmons* und *Salter* nicht genau bekannt ist, wird mit Rücksicht auf die Ergebnisse von *G. K. Batchelor* und *A. A. Townsend*, bei denen für ein Gitter mit dem Verhältnis Stabdurchmesser/Maschenweite = 3/16 das Gesetz $E \sim t^{-1}$ beobachtet wurde, für das hier vorliegende Verhältnis Stabdurchmesser/Maschenweite = 0,29 das gleiche Abklinggesetz, also $\xi = 2$ der Vergleichsrechnung zugrunde gelegt. Weiter gehören zur Rechnung die Werte $\varkappa = 0{,}28$ und[3] $2\pi L = 0{,}25\ ft$. Die mittlere Wellenlänge $2\pi L$ der Turbulenz hat rechnerisch die Größe der Maschenweite und ist also klein im Vergleich zu den Abmessungen des Strahles (Durchmesser 4 ft), so daß man wohl annehmen darf, daß von der Berandung des Strömungsgebietes kaum merkliche Einflüsse auf die Turbulenz in Kanalmitte ausgeübt werden. Angesichts dieser Tatsache und daß ferner die Turbulenz tatsächlich isotrop ist, wie aus den gemessenen Korrelationsfunktionen zu folgern ist, scheinen die Voraussetzungen der Theorie einigermaßen erfüllt zu sein. Da eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zu erzielen ist, besteht somit einige Wahr-

[1] *L. F. G. Simmons* und *C. Salter*, Proc. Roy. Soc. A 165 (1938) S. 73.

[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 74.

[3] *W. Heisenberg* hat auf Grund der gleichen Messungen die Größe $\varkappa$ auf etwa 0,5 geschätzt. Der Unterschied dürfte im wesentlichen auf die Abweichung zurückzuführen sein, die zwischen dem von *Heisenberg* numerisch berechneten Spektrum und der mathematisch exakten Form (4.5) besteht.

scheinlichkeit, daß die Annahmen der Rechnung den physikalischen Gegebenheiten gerecht werden und am Ort der Messung tatsächlich weitgehend ein statistischer Gleichgewichtszustand in dem definierten Sinne besteht. Zur Bestätigung wären allerdings Vergleiche mit weiteren Messungen nützlich, insbesondere um Unterlagen für die Konstante $\varkappa$ zu bekommen.

8. Zusammenfassung. Der von *W. Heisenberg* angegebene Näherungsansatz für die Turbulenzzähigkeit ermöglicht eine neue Behandlung des Turbulenzproblems. Aus der Tatsache, daß das Turbulenzspektrum, d. i. die Verteilung der kinetischen Energie der turbulenten Bewegung auf die Wellenzahlen (reziproke Wellenlänge), im Laufe der Zeit einem statistischen Gleichgewicht zustrebt, in welchem seine Form von den Anfangsbedingungen unabhängig ist, wird eine Beziehung zur Ermittlung des Spektrums hergeleitet. Die geringe Änderung des Spektrums mit der *Reynolds*zahl der Turbulenz erlaubt eine mathematische Vereinfachung. Die *Loitsianansky*sche Invariante liefert die noch fehlende Aussage, um von der Vielzahl der erhaltenen Lösungen eine ausgezeichnete festzulegen, die die spektrale Energieverteilung sowie das Dissipationsgesetz für isotrope Turbulenz im ausgebildeten statistischen Gleichgewicht angibt.

Bei geringen Abständen vom Turbulenzgitter (20 bis 100 Maschenweiten), bei denen die meisten bekannt gewordenen Messungen von Spektren und Korrelationsfunktionen vorgenommen wurden, besteht im allgemeinen noch kein voll ausgebildeter Gleichgewichtszustand. Spektrum und Dissipationsgesetz sind in diesem Stadium noch von den Bedingungen, unter denen die Turbulenz erzeugt wurde (Geometrie des Turbulenzgitters), abhängig. Doch hat sich in der Regel schon so weit ein Gleichgewichtszustand ausgebildet, daß der Vergleich solcher Messungen mit berechneten Spektren bei Auswahl einer passenden Lösung (passendes ξ) möglich ist. Ein derartiger Vergleich mit von *L. F. G. Simmons* und *C. Salter* gemessenen Spektren zeigt befriedigende Übereinstimmung.

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

(Eingegangen am 25. Februar 1949.)

Anschrift des Verfassers: *Julius Rotta*, (20b) Göttingen (Hann.), Böttingerstraße 6/8.

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F. K. Schmidt

B. L. van der Waerden

Band LIII

Rechenmethoden der Quantentheorie dargestellt in Aufgaben und Lösungen

I. Teil:

Elementare Quantenmechanik

Von

Dr. Siegfried Flügge

a. Professor an der Universität Marburg

Unter Mitarbeit von

Dr. Hans Marschall

Marburg

Mit 18 Abbildungen. X, 240 Seiten. 1947. DMark 18.—

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung: Unrelativistische Wellenmechanik. – Relativistische Wellenmechanik. – Aufgaben: Ebene Wellen. – Wellenpaket. – Korpuskel im Potentialkasten. – Eindimensionaler Potentialtopf. – Ein stückweise konstantes Potential. – Potentialstufe im endlichen Grundgebiet. – Desgl., mit aufgesetzter Wand. – Endliches Grundgebiet mit Scheidewand. – Eckige Potentialschwelle. – Ausgeglichene Potentialstufe. – Das Potential $1/\cos^2 \alpha x$ als anharmonischer Oszillator. – Die unsymmetrische Potentialmulde $V_1/\sin^2 \alpha x + V_2/\cos^2 \alpha x$. – Harmonischer Oszillator. – Das eindimensionale Keplerproblem. – Der freie Fall. – Stückweise konstantes periodisches Potential. – Periodisch errichtete Potentialwände. – Zylindersymmetrisches Potential. – Streuung am undurchdringlichen Zylinder. – Zweidimensionales Keplerproblem. – Kugelsymmetrisches Potential; Kugelfunktionen. – Veranschaulichung einiger Kugelfunktionen. – Eigenwerte des Drehimpulses. – Beschränkter Rotator. – Korpuskel in Potentialkugel. – Kugelsymmetrischer Oszillator. – Entartung beim kugelsymmetrischen Oszillator. – Rotationsschwingungsspektrum. – Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelfunktionen. – Streuung an einer undurchdringlichen Kugel. – Streuung an einer Kugel konstanten Potentials. – Streuung an $V(r)$, Methode der Partialwellen. – Streuung an einer Potentialmulde. – Eigenwerte zur Potentialmulde von Aufg. 33. – Keplerproblem, positive Energien. – Keplerproblem, Eigenwerte bei negativen Energien. – Rutherfordsche Streuformel in Parabelkoordinaten. – Streuung an $V(r)$, Bornsche Näherung. – Rutherfordsche Streuformel in Bornscher Näherung. – Deuteronproblem mit $V = -A e^{-r/a}$, exakt. – Desgl., Näherungslösung. – Desgl., Näherung durch Ritzsches Verfahren. – Potential $V(r)$ und homogenes Magnetfeld. – Anregung durch eine Lichtwelle. – Photoemission von Atomelektronen. – Mitschwingen mit einer Lichtwelle. – Brechungsexponent (Dispersion). – Matrixelemente für eckigen Potentialtopf. – Matrixelemente für den harmonischen Oszillator. – Auswahlregeln für Dipolstrahlung. – Spektrale Intensitäten für $V(r)$. – Intensitätsverhältnis der Balmerlinien. – Umrechnung von Ablenkwinkeln. – Separation von Schwerpunkts- und Relativbewegung. – Gekoppelte lineare Oszillatoren, strenge Lösung. – Störungsrechnung für zwei gekoppelte Systeme. – Zeitlicher Verlauf des Austauschs. – Ionisierungspotential des Heliumgrundzustandes. – Neutrales Wasserstoffmolekül (chemische Bindung). – Stoß zweier Edelgasatome. – Mottsche Streuformel. – Streuung von Elektronen an H-Atomen. – Zweidimensionale Tensoren; Pseudoskalar. – Dreidimensionaler Pseudovektor und Pseudoskalar. – Invarianz zweidimensionaler Wellengleichungen. – Aufstellung zweidimensionaler Diracgleichungen. – Lorentzinvarianz der Diracgleichung. – Schrödingergleichung als Grenzfall. – Lösung der Diracgleichung im kräftefreien Fall. – Spin der ebenen Diracwelle in z-Richtung. – Strom- und Raumdichte der ebenen Diracwelle in z-Richtung. – Spin der ebenen Diracwelle in beliebiger Richtung. – Reflexion am Potentialsprung nach DIRAC, senkrechte Inzidenz. – Desgl., schräger Einfall. – Ausgeglichene Potentialstufe nach DIRAC. – Kugelsymmetrisches Potential nach DIRAC. – Drehimpulssätze für $V(r)$ nach DIRAC. – Bedeutung der Lösungen in $V(r)$ für $k=1$. – Keplerproblem nach DIRAC (Feinstrukturformel). – Mathematischer Anhang.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

W. Blaschke · R. Grammel · E. Hopf · F. K. Schmidt
B. L. van der Waerden

Band XXVII

Grundzüge der theoretischen Logik

Von

D. Hilbert † und **W. Ackermann**
Lüdenscheid

Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949.
DMark 16.50; Ganzleinen DMark 19.80

Aus dem Vorwort:

Die Veränderungen gegenüber der zweiten Auflage sind verhältnismäßig gering. Abgesehen von kleineren Verbesserungen und Zusätzen haben § 1 und § 2 des zweiten Kapitels, bei denen die bisherige Darstellung reichlich kurz war, eine Erweiterung erfahren. Im dritten Kapitel sind die Fassungen der Einsetzungsregel für die Prädikatenvariablen und des Gödelschen Vollständigkeitssatzes verbessert, beim Entscheidungsproblem neue Fortschritte nachgetragen worden. Am stärksten verändert hat sich der in § 5 des vierten Kapitels gegebene Aufbau des Stufenkalküls. Ein kurzer Schlußabschnitt ist hinzugekommen.

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung.

Erstes Kapitel: **Der Aussagenkalkül.**

Einführung der logischen Grundverknüpfungen. Äquivalenzen; Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen. Normalform für die logischen Ausdrücke. Charakterisierung der immer richtigen Aussagenverbindungen. Das Prinzip der Dualität. Die disjunktive Normalform für logische Ausdrücke. Mannigfaltigkeit der Aussagenverbindungen, die aus gegebenen Grundaussagen gebildet werden können. Ergänzende Bemerkungen zum Problem der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit. Systematische Übersicht über alle Folgerungen aus gegebenen Axiomen. Die Axiome des Aussagenkalküls. Beispiele für die Ableitung von Formeln aus den Axiomen. Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems. Die Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Systems.

Zweites Kapitel: **Der Klassenkalkül** (einstellige Prädikatenkalkül).

Inhaltliche Umdeutung der Symbolik des Aussagenkalküls. Vereinigung des Klassenkalküls mit dem Aussagenkalkül. Systematische Ableitung der traditionellen Aristotelischen Schlüsse.

Drittes Kapitel: **Der engere Prädikatenkalkül.**

Unzulänglichkeit des bisherigen Kalküls. Methodische Grundgedanken des Prädikatenkalküls. Vorläufige Orientierung über den Gebrauch des Prädikatenkalküls. Genaue Festlegung der Bezeichnungen im Prädikatenkalkül. Die Axiome des Prädikatenkalküls. Das System der identischen Formeln. Die Ersetzungsregel; Bildung des Gegenteils einer Formel. Das erweiterte Dualitätsprinzip; Normalformen. Die Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit des Axiomensystems. Die Vollständigkeit des Axiomensystems. Ableitung der Schlußfolgerungen aus gegebenen Voraussetzungen; Zusammenhang mit den identischen Formeln. Das Entscheidungsproblem.

Viertes Kapitel: **Der erweiterte Prädikatenkalkül.**

Der Prädikatenkalkül der zweiten Stufe. Einführung von Prädikatenprädikaten; logische Behandlung des Anzahlbegriffs. Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre im erweiterten Kalkül. Die logischen Paradoxien. Der Stufenkalkül. Anwendungen des Stufenkalküls. Abschließende Bemerkungen zum Stufenkalkül.
Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.